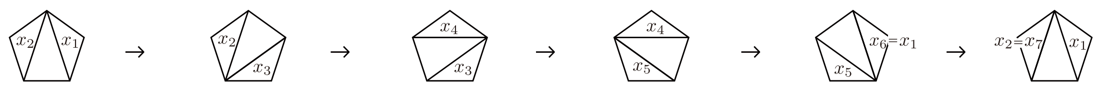
2.【現在までの研究状況】（図表を含めてもよいので、わかりやすく記述してください。様式の変更・追加は不可(以下同様)）
① これまでの研究の背景、問題点、解決方策、研究目的、研究方法、特色と独創的な点について当該分野の重要文献を挙げて記述してください。
② 申請者のこれまでの研究経過及び得られた結果について、問題点を含め①で記載したことと関連づけて説明してください。
なお、これまでの研究結果を論文あるいは学会等で発表している場合には、申請者が担当した部分を明らかにして、それらの内容を記述してください。

申請者の研究対象は**団代数** (cluster algebra、クラスター代数) である。

（団代数とは） 団代数は [FZ1] において導入された、**団変数**と呼ばれる生成元で生成される、有理関数体の部分環である。元々は Lie 理論から生まれた団代数であるが、現在は多元環の表現論、Poisson 幾何、完全 WKB 解析など、分野を問わずさまざまな数学において応用される重要な概念である。

（団代数の例 (A_2 型)） 正五角形の三角形分割を任意に一つ与えその 2 辺に対応する変数 x_1, x_2 を与える。これを初期時刻 t_0 の三角形分割とよぶことにする。初期時刻の三角形分割を、下図のように順番に対角線を異なる対角線に移すことによって変化させることを考える。それぞれの対角線に対応する変数を、トレミーの定理（四角形の対辺同士の積の和と対角線の積は一致する）により形式的に $x_{i+2} = \frac{x_{i+1}+1}{x_i}$ で与える。このとき、$x_3 = \frac{x_2+1}{x_1}$, $x_4 = \frac{x_2+x_1+1}{x_1x_2}$, $x_5 = \frac{x_1+1}{x_2}$ であり、$x_6 = x_1$ で元に戻ってくる。



時刻	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
団	(x_1, x_2)	$(\frac{x_2+1}{x_1}, x_2)$	$(\frac{x_2+1}{x_1}, \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2})$	$(\frac{x_1+1}{x_2}, \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2})$	$(\frac{x_1+1}{x_2}, x_1)$	(x_2, x_1)
C 行列	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&-1\\0&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$
G 行列	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\-1&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$
F 多項式 $F_{1;t}$	1	u_1+1	u_1+1	u_2+1	u_2+1	1
F 多項式 $F_{2;t}$	1	1	$u_1u_2+u_2+1$	$u_1u_2+u_2+1$	1	1

2 つの変数の組を**団**といい、団の各成分を**団変数**と呼ぶ。団から隣の団に移る変換のことを**変異**と呼ぶ (上図参照)。団変数により生成される環 $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[x_1,\ x_2,\ \frac{x_2+1}{x_1}, \frac{x_2+x_1+1}{x_1x_2}, \frac{x_1+1}{x_2}]$ を (A_2 型) **団代数**と呼ぶ。

（研究の背景とその問題点） 団代数研究の主題として、**変異をより扱いやすい形で定式化する**というものがある。変異は団変数間の漸化式（上の例では $x_{i+2} = \frac{x_{i+1}+1}{x_i}$）によって定義されるが、一般に式が複雑で扱いにくい。その問題を解決すべく、[FZ2] は変異を各団に付随する C **行列**、G **行列**という 2 つの整数行列族と、各団変数に付随する F **多項式**という多項式族を用いて特徴付けた。ここで、C 行列は団に含まれる団変数の係数の情報、G 行列は次数の情報を持つ行列である。また、F 多項式は項の数や係数のつき方を決定する多項式である（例は上図）。変異の定義漸化式の代わりに C, G 行列と F 多項式を考える利点として「C, G 行列の性質を、行列式や転置といった行列特有の操作を用いて調べることができる」という点が挙げられる。[NZ] はこの利点を生かして C 行列の転置と G 行列が互いに逆行列の関係にあることを示している。ところが、この特徴づけにも問題点が存在する。それは、**F 多項式が変異により爆発的に項の数が増える多項式**であるため、直接計算が困難かつ性質が見えにくいという点である。

（申請者の研究と得た結果） 申請者は上記の研究状況を踏まえ、F 多項式を C, G 行列と同じように行列特有の操作を用いた議論ができないかと考えた。そこで、団に付随する F **行列**を定義した。この行列は、団に含まれる団変数に付随する F 多項式の最高次数を行列の形に並べたものである。一例を挙げる。

$$団\ (x_{1;t}, x_{2;t})\ に対して \begin{cases} F_{1;t}(u_1, u_2) = u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2} + \dots \\ F_{2;t}(u_1, u_2) = u_1^{\beta_1}u_2^{\beta_2} + \dots \end{cases} のとき、F_t = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2\end{bmatrix} と定める。$$

申請者の研究の 1 つは、この F 行列が対応する F 多項式たちを決定することを示すことである。すなわち、次の F **多項式の一意性予想**の解決を試みている。

予想 1. 団に含まれる各団変数に付随する F 多項式たちは、F 行列により一意的に定まる。

予想 1 は、少なくとも階数 2 の団代数と有限型の団代数においては成立することが申請者の研究により

申請者登録名　行田康晃

（現在までの研究状況の続き）

判明している。そして、その具体的な対応を知るために次の F **多項式の復元問題**を考える。

問題 2. 与えられた F 行列から、どのような手順で F 多項式を復元することができるか？

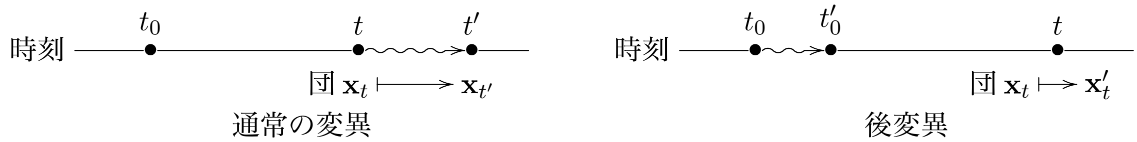
この問題を解決することにより、変異は C, G, F の 3 つの行列族によって特徴づけられることがわかる。

$$\boxed{\textbf{団に含まれる } F \textbf{ 多項式たち}} \; \underset{\text{予想 1、問題 2}}{\overset{\text{最高次数の情報により定義}}{\rightleftarrows}} \; \boxed{\textbf{団に付随する } F \textbf{ 行列}}$$

また、F 多項式を行列として捉えることにより、今まで見えてこなかった F 多項式の性質が見えてくることも期待される。これが申請者のもう 1 つの研究である。その一例として、申請者が証明した F 行列の**双対性**と呼ばれる性質がある。これは、F 行列の対称性を表す非常に興味深い結果である。

定理 3. 初期時刻 t_0、時刻 t の F 行列の転置が、初期時刻 t、時刻 t_0 の F 行列と一致する。

F 行列の双対性により、[FZ2] や [NZ] で存在が示唆されている**後変異**の、F 行列に関する漸化式が導かれる。ここで後変異とは、通常の変異と対称的に、初期時刻 t_0 の方を動かす変換のことである。現在、申請者は**定理 3 と F 行列の後変異の漸化式についての論文を執筆中**である。



（参考文献）[FZ1] S. Fomin and A. Zelevinsky, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), 497–529.
[FZ2] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Comp. Math.* **143** (2007), 112–164.
[NZ] T. Nakanishi and A. Zelevinsky, *Contemp. Math.* **565** (2012), 217–226.

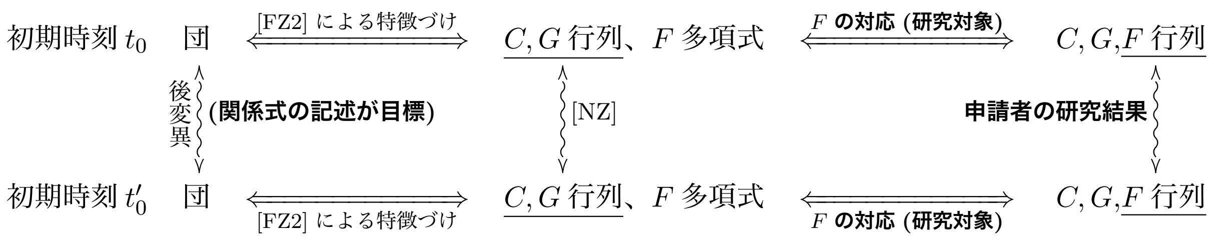
3.【これからの研究計画】

(1) 研究の背景

2. で述べた研究状況を踏まえ、これからの研究計画の背景、問題点、解決すべき点、着想に至った経緯等について参考文献を挙げて記入してください。

（研究計画の背景と着想の経緯）

本研究は、団代数の**変異の扱いやすい形での定式化**と、それによる**新たな性質の発見**を目標としている。現在申請者が特に注目しているのが、**後変異**である。後変異は [NZ]、[RS] などにより通常の変異と双対性を持つ特別な変換であることが示唆されているが、まだ隣接した初期時刻の間での団に関する漸化式は与えられていない。ただし、C 行列、G 行列の漸化式は既に [NZ] により与えられている、さらに、申請者の研究によって F 行列の漸化式も与えられたので、あとは F 多項式と F 行列の対応関係を明らかにすれば、後変異の漸化式による記述が可能となる。



（問題点と解決すべき点）

F 多項式と F 行列の対応関係は、F 多項式の一意性予想と F 多項式の復元問題を解決することにより明らかになるので、これを解決することがこの研究の当面の目標である。一意性予想について、すでに解決している階数 2 と有限型の団代数については団変数の分母と F 行列の列ベクトルが対応を持つという事実を用いているが、これは一般の団代数の場合成立しないので別の方法で証明する必要がある。また復元問題についても同様に、団変数の分母と F 行列の列ベクトルの対応が使えるケースではそれを利用した解法の方針が立つが、それ以外の場合は別の方法を探る必要がある。

（参考文献）[RS] N. Reading and S. Stella ,*Pacific J. Math.* **293** (2018), 179–206.

申請者登録名　行田康晃

ＤＣ

(2) **研究目的・内容** (図表を含めてもよいので、わかりやすく記述してください。)

① 研究目的、研究方法、研究内容について記述してください。
② どのような計画で、何を、どこまで明らかにしようとするのか、具体的に記入してください。
③ 所属研究室の研究との関連において、申請者が担当する部分を明らかにしてください。
④ 研究計画の期間中に異なった研究機関(外国の研究機関等を含む。)において研究に従事することを予定している場合はその旨を記載してください。

(研究目的)

本研究は大きく分けて (A) F 多項式と F 行列の対応関係の解明、(B) F 行列による F 多項式の性質の解明、の 2 つの目的を持つ。

(研究方針)

研究目的 (A) の達成のために、(1) 任意の団代数における F 多項式の一意性予想(予想 1)の証明、(2)F 多項式の復元問題(問題 2)の解決を行う。また (B) に関して、(3)F 行列の他分野との関わりを考える。

(研究内容と研究計画)

(1)任意の団代数における F 行列による一意性の成立の証明

- F 行列により団が一意的に定まることが示されればそこから F 多項式も一意的に決定されるので、この十分条件について考察を試みる。[CHL] により C 行列から団が一意的に定まることがわかっているので、**F 行列と C 行列の関係式を調べる**。
- 団変数の分母を表す $\mathbf{d}$ ベクトルを横に並べた D 行列は、**多くの団代数において F 行列と一致する**ことがわかっており、しかも D 行列は団を一意的に定めることが [CL] によりわかっているので、F 行列と D 行列が一致する団代数については F 多項式の一意性予想は成立している。よって、この団代数の特徴づけについて調べる。

(2)F 多項式の復元問題の解決

- A 型団代数について、申請者は F 行列から団変数の分母を経由して F 多項式を与える手法を得ているので、これをまず拡張することを考える。そのためには**団変数の分母から分子の展開公式が具体的にどのように与えられるか**を考える必要がある。これについては [MS] などに先行研究があるので、これらを用いて構成法を考える。
- 上記の方法は F 行列と団変数の分母に対応がある場合にしか用いることができないので、より一般的なアプローチも考える。F 多項式は団変数から得られる多項式であるから、F 多項式の復元問題を解決するためには、F 行列がもつ F 多項式の最高次数に関する情報のほかに、元の団変数に関する情報が当然必要である。そこで、団変数に関する情報を含む **C 行列、G 行列と合わせて F 多項式の復元を考える**ことが妥当であると考える。

問題 4. 与えられた C, G, F 行列から、どのような手順で F 多項式を復元することができるか?

(3)F 行列の他分野との関わり

- F 行列の箙(有向グラフ)の表現論との関わりを考える。申請者の研究により、箙 Q から誘導される団代数の F 行列は、ポテンシャル付き箙 (Q, W) から誘導される団圏 $\mathcal{C}$ の 2 つの対象間の射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma\Gamma, T_j)$ の**次元ベクトルに一致**していることが判明している。すなわち、箙 Q から誘導される F 行列の性質については、その団圏における特定の射の集合に関する性質を考えることに帰着されることがわかる。これを手掛かりに、団圏の性質を用いて F 行列の性質を考えたり、逆に F 行列の性質から団圏の新しい性質を見出す。
- トーリック幾何と団代数の間の関係について、[GHKK] による先行研究が存在する。F 多項式は、この論文で扱われている**分散図形の壁に付随する関数と関係がある**と思われる。団代数とトーリック幾何の関係性について深く学習し、F 行列が分散図形における何らかの概念と対応するかどうかを考える。

(参考文献) [CHL] P. Cao, M. Huang, and F. Li, preprint, arXiv:1704.07549
[CL] P. Cao and F. Li, preprint, arXiv:1803.05281
[GHKK] M. Gross, P. Hacking, S. Keel, and M. Kontsevich, *J. Amer. Math. Soc.* **31** (2018), 497-608 .
[MS] G. Musiker and R. Schiffler, *Alg. Comb.* **32** (2010) 187-209.

申請者登録名 行田康晃

(3) 研究の特色・独創的な点

次の項目について記載してください。
① これまでの先行研究等があれば、それらと比較して、本研究の特色、着眼点、独創的な点
② 国内外の関連する研究の中での当該研究の位置づけ、意義
③ 本研究が完成したとき予想されるインパクト及び将来の見通し

（研究の特色、着眼点、独創的な点）

本研究の特色は、多項式による漸化式により定義される団の変異を、C, G, F 行列という **3 つの行列で特徴付ける**という点である。従来の C, G 行列と F 多項式による特徴づけと比較すると、3 つの要素が全て行列という同じ土俵にあるため、これまで言及されてこなかった **C 行列と F 多項式、G 行列と F 多項式の関係性についても明確化される**ことになる。このような視点は**申請者独自のもの**である。

（研究の位置づけ、意義）

申請者の研究は、団代数の研究において扱いの難しかった F 多項式を扱いやすい F 行列に置き換えることで、**従来の概念、定理、予想をより平易な形で書き換える**ことを促すものである。また、[RS]、[FZ2]、[NZ] などで一部の付随概念にのみ言及されていた団の後変異についても漸化式が与えられることになる。

（研究が完成したとき予想されるインパクト及び将来の見通し）

F 行列と F 多項式の対応関係の判明により、**後変異に関する研究の促進**が起こる。後変異に関する現象が、具体的な漸化式により統一的な視点で説明できるようになるので、後変異に関連するさまざま性質がわかるようになると予想され、団代数の**他分野への応用**が進むと思われる。特に、既に変異が応用されている箙の表現論などの分野に対して、後変異の性質を応用することが考えられる。また別のメリットとして団代数における**団変数の計算の効率化**が挙げられる。これまでは大量の項を持つ F 多項式をそのまま用いて変異の計算をしていたが、F 行列を用いることにより団に含まれる団変数の数のサイズの整数正方行列の計算に帰着されるので、従来より計算効率が飛躍的に上がることが期待される。

(4) 年次計画

申請時点から採用までの準備状況を踏まえ、DC1 申請者は１～３年目、DC2 申請者は１～２年目について、年次毎に記載してください。元の枠に収まっていれば、年次毎の配分は変更して構いません。

(申請時点から採用までの準備)

- 自分の研究結果の他分野における応用について、特に応用の目処が立ちそうなトーリック幾何や団圏をより深く学び、習得する。
- 現在執筆中の F 行列の双対性に関する論文を完成させ、論文誌に投稿する。
- 得られた予想や結果を「環論および表現論シンポジウム」や「代数学若手研究会」、「日本数学会年会」などの研究集会で発表し、他の研究者と交流し意見を交換し、自分の研究の他分野への応用を考える糧とする。
- 得られた結果をまとめて、修士論文として提出する。

(１年目)

- 前年度に論文にした内容について引き続き研究集会に発表者として積極的に参加し、他の研究者の意見を聞くことで未解決な予想について情報収集を行う。 具体的には、この年の 6 月に RIMS で開催が予定されている研究集会「Cluster Algebras」に参加し、他の研究者と意見交換を行い、自らの研究に役立てる。
- F 行列と D 行列が一致する団代数の特徴づけを行い、(1) の限定的な解決を試みる。そこから、一般の場合の証明に用いることのできる性質がないかを考える。
- 有限型団代数、点付き曲面から誘導される団代数において Musiker-Shiffer の公式 [MS] を元に (2) について考察し、解決を試みる。
- (3) について、団圏への F 行列の性質の応用や、団圏の性質を F 行列に応用する方法の考察を試みる。

(２年目)

- 「International Conference on Representations of Algebras」などの国際的な研究集会にも参加し、また特にこの分野において顕著な業績を上げている Peigen Cao 氏、 Fang Li 氏など海外の研究者とも交

申請者登録名　行田康晃

（年次計画の続き）

流を深め、 活発に議論する。

- 団圏の議論を用いて、歪対称型団代数について (1) の解決を試みる。
- 歪対称型団代数について、(2) を (1) と関連付けながら解決を試みる。

(３年目) (DC ２は記入しないでください。)

- (1)、(2) の残りの部分について研究を完成させる。すなわち、一般の団代数における F 多項式の一意性予想を解決し、F 行列からの F 多項式の復元法を確立させる。(A)、(B) の解決の成果を論文にする。
- 申請者により得た結果の影響について考察をする。特に、F 多項式についての予想や定理を F 行列の言葉を用いて言い換え、それについて解決や考察を試みる。また、トーリック幾何についての応用を探る。
- 自分の研究結果についてさらに広く知ってもらうために、海外の研究集会にも積極的に参加する。
- ここまでの研究結果をまとめ、博士論文として提出する。

(5) 人権の保護及び法令等の遵守への対応

本欄には、研究計画を遂行するにあたって、相手方の同意・協力を必要とする研究、個人情報の取り扱いの配慮を必要とする研究、生命倫理・安全対策に対する取組を必要とする研究など法令等に基づく手続きが必要な研究が含まれている場合に、どのような対策と措置を講じるのか記述してください。**例えば、個人情報を伴うアンケート調査・インタビュー調査、国内外の文化遺産の調査等、提供を受けた試料の使用、侵襲性を伴う研究、ヒト遺伝子解析研究、遺伝子組換え実験、動物実験など**、研究機関内外の情報委員会や倫理委員会等における承認手続きが必要となる調査・研究・実験などが対象となりますので手続きの状況も具体的に記述してください。

なお、該当しない場合には、その旨記述してください。

該当なし。

4. 【研究成果等】（下記の項目について申請者が中心的な役割を果たしたもののみ項目に区分して記載してください。その際、通し番号を付すこととし、該当がない項目は「なし」と記載してください。申請者にアンダーラインを付してください。論文数・学会発表等の回数が多くて記載しきれない場合には、主要なものを抜粋し、各項目の最後に「他○報」等と記載してください。査読中・投稿中のものは除く）

(1) **学術雑誌等（紀要・論文集等も含む）に発表した論文、著書**（査読の有無を区分して記載してください。査読のある場合、印刷済及び採録決定済のものに限ります。）
著者（申請者を含む全員の氏名（最大 20 名程度）を、論文と同一の順番で記載してください。）、題名、掲載誌名、発行所、巻号、pp 開始頁－最終頁、発行年をこの順で記入してください。

(2) **学術雑誌等又は商業誌における解説、総説**

(3) **国際会議における発表**（口頭・ポスターの別、査読の有無を区分して記載してください。）
著者（申請者を含む全員の氏名（最大 20 名程度）を、論文等と同一の順番で記載してください。）、題名、発表した学会名、論文等の番号、場所、月・年を記載してください。発表者に○印を付してください。（発表予定のものは除く。ただし、発表申し込みが受理されたものは記載しても構いません。）

(4) **国内学会・シンポジウム等における発表**
(3)と同様に記載してください。

(5) **特許等**（申請中、公開中、取得を明記してください。ただし、申請中のもので詳細を記述できない場合は概要のみの記述で構いません。）

(6) **その他**（受賞歴等）

(1) 学術雑誌 (紀要・論文集等も含む) に発表した論文、著書
該当なし。
(2) 学術雑誌等又は商業誌における解説・総説
該当なし。
(3) 国際会議における発表
該当なし。
(4) 国内学会・シンポジウムにおける発表
該当なし。
(5) 特許等
該当なし。
(6) その他
該当なし。

申請者登録名　行田康晃