

ラグランジュ・マルコフスペクトラム入門

古典的マルコフ理論から一般化マルコフ数へ

行田康晃 (名古屋大学高等研究院)

ver. 1.2.2

目次

第 1 章	分野の背景と本稿の内容	7
1.1	ラグランジュ/マルコフスペクトラムと一般化マルコフ数の歴史	7
1.2	本稿の構成	16
1.3	本稿の目的	17
第 I 部	ラグランジュスペクトラムとマルコフスペクトラム	19
第 2 章	連分数	21
2.1	既約分数	21
2.2	有限正則連分数	22
2.3	無理数の無限連分数展開	27
2.4	無理数のユニモジュラー群軌道	32
2.5	循環連分数と 2 次無理数	37
第 3 章	ラグランジュスペクトラム	43
3.1	定義と最初の具体例	43
3.2	ラグランジュ定数の両側無限数列と上限による表示	47
3.3	2 次無理数のラグランジュ定数	52
第 4 章	マルコフスペクトラム	57
4.1	定義と最初の具体例	57
4.2	2 次形式のユニモジュラー群軌道	59
4.3	マルコフ定数の両側無限列による表示	62
4.4	有理数係数 2 次形式のマルコフ定数	68
第 II 部	一般化マルコフ数	71
第 5 章	一般化マルコフ方程式と一般化マルコフ数	73
5.1	定義と基本性質	73
5.2	一般化マルコフ木	79
5.3	ファレイ木と分数ラベル	83
5.4	特性数	87

第 6 章	フェンス型順序集合と一般化マルコフ距離	91
6.1	フェンス型順序集合の順序イデアルと連分数	91
6.2	フェンス型順序集合のスケイン関係式	95
6.3	曲線の一般化マルコフ長と一般化マルコフ距離	105
第 7 章	一般化コーン行列	121
7.1	定義と具体例	121
7.2	一般化マルコフ数と特性数による成分の記述	122
7.3	特性数の関係式	127
7.4	一般化強許容数列による一般化コーン行列の記述	129
第 8 章	一般化離散マルコフスペクトラム	147
8.1	定義と主定理	147
8.2	メカニカル語	151
8.3	マルコフの定理	156
8.4	無理数傾き直線によるラグランジュ/マルコフ定数	165
8.5	$(0, 0, 0)$ 型と $(2, 2, 2)$ 型の関係性	172
8.6	フロベニウスの一意性予想とその一般化	173
あとがき：更なる話題		183
付録 A	本文中で使用した有名事実の証明	189
A.1	ボルツァノ=ワイエルシュトラスの定理	189
A.2	ケーリー・ハミルトンの定理	190
A.3	線形漸化式を満たす解数列空間の基底	191
A.4	無理数回転軌道の稠密性	192
参考文献		195

更新履歴

2026/05/01 ver. 1.0.0

公開。

2026/05/04 ver. 1.0.1

細かい言い回しと誤字を修正。

2026/05/06 ver. 1.1.0

マルコフの定理の証明にミスがあったので修正。 $S(\mathbf{b}) = 3$ となる場合の分類が不完全であった。従来の証明の方法でも修正は可能だったが、強許容数列との関係性を強調したかったので証明方針を転換し、コーン語ではなくメカニカル語を使う方針をとった。それに伴って 8.2 節にメカニカル語の項を追加。

2026/05/07 ver. 1.1.1

ver 1.1.0 で起きた議論の誤りを修正。

2026/05/09 ver. 1.2.0

無理数傾きの直線から得られる両側無限列からマルコフ定数を計算する方法を思いついたため 8.4 節を新設。

2026/05/10 ver. 1.2.1

hyperref を導入。

2026/05/12 ver. 1.2.2

無理数傾きの直線から得られる両側無限列を任意の位置で切断して片側無限列とすると、そこからラグランジュ定数を計算できることに気がついたため追加。図 6.15 における角 θ_i が誤解を招きやすい位置に置かれていたため図を更新。命題 3.2.1 の証明が回りくどかったので修正。また、命題 5.2.6 の遷移図における状態番号のうち、(3) と (6) がひっくり返っていたのを修正。

第 1 章

分野の背景と本稿の内容

本稿は、無理数を有理数でどれほどよく近似できるかを調べるディオファントス近似理論のうち、とくにラグランジュスペクトラム・マルコフスペクトラム（以下、まとめて書くときはラグランジュ/マルコフスペクトラムと書く）と呼ばれる集合の構造、ならびにその理論と関係して現れる一般化マルコフ数について解説する入門書である。前提知識としては、極限・上極限、行列計算、初歩的な整数論の基礎を想定する。順序集合、2 次形式、曲線の組合せ論、団代数に由来する用語については本文中で必要な範囲を導入するが、とくに第 II 部ではやや抽象的な道具を用いる。本論（第 2 章～第 8 章）ではすべての命題を丁寧に証明する。本論に入る前に、本章ではこの分野の歴史的背景と、本稿で扱う対象がどのような流れの中に位置づけられるかを概観する。

1.1 ラグランジュ/マルコフスペクトラムと一般化マルコフ数の歴史

まず、本稿で扱う対象とその周辺の概観を、時代の流れに沿って簡単に説明する。

1.1.1 連分数とディオファントス近似理論の登場

ラグランジュ/マルコフスペクトラムを述べる前に、その背景にあるディオファントス近似理論について触れておく。ディオファントス近似理論とは、大まかに言えば「無理数 α を有理数 $\frac{p}{q}$ でどこまでよく近似できるか」を調べる理論である。ここで「どこまでよく近似できるか」という問いには多くのバリエーションがあるが、最も素朴な問いは次のようなものである。

問題 1.1.1. 無理数 α を考える。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon$ を満たす有理数 $\frac{p}{q}$ は常に存在するか。

この答えは真である。今日の実数の構成から見ればこれは自明な事実であり、しかもそのような有理数は無限に存在する。しかし、ここからさらに一歩進んで、次の問いを考えることには十分な意味がある。

問題 1.1.2. 無理数 α に収束する「性質の良い」有理数列を、どのように構成すればよいか。

この問いに対して、連分数展開を途中で打ち切ることによって得られる有理数列という 1 つの答えを与えたのが Euler の 1737 年の論文 [Eul37] である。Euler が見出した無理数と無限連分数との関係は、現在では次のような対応として理解されている。ただし、Euler 自身がこの形で次の定理を証

明したという意味ではない点には注意しておく。

定理 1.1.3. 最初の成分が整数、それ以降の各成分が正整数であるような無限数列全体の集合を \mathcal{S} とする。このとき、写像

$$F : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad (a_k)_{k=0}^{\infty} \mapsto [a_0; a_1, a_2, \dots] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

は全単射である。

また、Lagrange は 1770 年の論文 [Lag70] において、連分数展開を用いて 2 次無理数、すなわち有理数係数の 2 次方程式の解として現れる無理数を特徴づけた。

定理 1.1.4 (ラグランジュの定理). 無理数 α の連分数展開が最終的に周期的であることと、 α が 2 次無理数であることは同値である。

この時代に得られた連分数に関する知見は、後に発展するディオファントス近似理論において中心的な道具となっていく。

19 世紀になると、「無理数を有理数でどれほどよく近似できるか」という根源的な問いは、次のような形で考えられるようになる。

問題 1.1.5. 無理数 α に対して、 $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{Lq^n}$ を満たす有理数 $\frac{p}{q}$ が無限に存在するような $L > 0$ や $n > 0$ は、どこまで大きくできるか。

この問題が何を問うているのかを、具体例を通して考えてみよう。無理数として $\pi = 3.141592\dots$ をとる。 π との差が小さい有理数は (先ほども述べたように) 差の許容範囲をいくら小さくしても無限に存在する。たとえば $|\pi - \frac{p}{q}| < \frac{1}{1000}$ を満たす有理数は、

$$\frac{p}{q} = \frac{3141}{1000}, \frac{6283}{2000} \left(= \frac{31415}{10000} \right), \frac{314159}{100000}, \frac{392699}{125000} \left(= \frac{3141592}{1000000} \right), \frac{15707963}{5000000} \left(= \frac{31415926}{10000000} \right), \dots \quad (1.1.1)$$

のようにいくらでも作ることができる。しかし、これらの有理数はいずれも比較的大きな分母を持っている。一般に、要求する誤差が小さくなるほど、それを満たす有理数には相応に大きな分母が必要になる。分母 q が小さい分数は数直線上で粗く並ぶため、特定の無理数の近くに来る可能性も低くなるからである。したがって分数による近似というものを考えるときには、単に誤差が小さいかどうかだけでなく、その誤差をどれほど小さな分母で実現しているかという点も重要な要素になる。この「近似精度に対する分母の小ささ」は、 $\frac{1}{Lq^n}$ という形で表したときの n や L の大きさによって測ることができる。ただし、 L と n を同時に動かすと尺度が定まりにくいので、通常は一方を固定してもう一方を調べる。

まず $L = 1$ と固定し、(1.1.1) に現れた各有理数について、実際に取りうる n の上限を見てみよう。この値は $n = -\frac{\log|\pi - \frac{p}{q}|}{\log q}$ で計算でき、左から順におよそ 1.076, 1.222, 1.115, 1.213, 1.085 となる。一方、 $\frac{22}{7}$ や $\frac{355}{113}$ について同じ値を計算すると、それぞれおよそ 3.429, 3.201 となり、上の例よりもずっと大きい。これは、 $\frac{22}{7}$ や $\frac{355}{113}$ が、その分母の大きさから期待されるよりもはるかに良い近似を与えていることを意味している。

このように、 L や n を大きく取れる近似を「良い近似」と呼ぶことにすれば、問題 1.1.5 は与えられた無理数 α に対して、「近似の良さ」を表す指標 L や n をどこまで引き上げると、それ以上の精度を持つ有理数近似が無限には存在しなくなるのか？という問いを問うているに他ならない。ただし、この問いに答えることの意味はまだ明確ではない。この値は無理数の何を測っているのだろうか？そこでまず、「良い有理数近似をあまり持たない数」とはどのようなものかを考える。このとき、次の事実が基本になる。

定理 1.1.6. 任意の有理数 α に対して、 $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$ を満たす既約分数 $\frac{p}{q}$ が無限個存在するような n の上限は 1 である。

これと、本格的なディオファントス近似理論の出発点の一つとされるディリクレの定理 [Dir42] を比較してみよう。

定理 1.1.7 (ディリクレの定理). 任意の無理数 α に対して、 $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$ を満たす有理数 $\frac{p}{q}$ が無限個存在するような n の上限は少なくとも 2 である。

この 2 つの定理から、有理数自身が実数の中で最も良い有理数近似を豊富には持たない数であることがわかる。言い換えると、 $L = 1$ としたときに取りうる n の上限は、「その実数がどれほど有理数から性質的に離れているか」を測る指標と見ることができる。この上限は無理数度と呼ばれ、 $\mu(\alpha)$ で表される。定理 1.1.6 より有理数の無理数度は 1 であり、Dirichlet の定理より任意の無理数 α に対して $\mu(\alpha) \geq 2$ である。さらに、 $\mu(\alpha) = 2$ となる無理数が存在することは、Liouville が [Lio44] で示した次の定理 (リュービルの定理) から従う。

定理 1.1.8 (リュービルの定理). α を d 次の代数的無理数とする。このとき、ある定数 $L > 0$ が存在して、任意の有理数 $\frac{p}{q}$ に対して $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Lq^d}$ が成り立つ。

この定理とディリクレの定理を組み合わせると、すべての 2 次無理数の無理数度が 2 であることがわかる。実際、2 次無理数 α について $\mu(\alpha) > 2$ であれば、ある $\varepsilon > 0$ に対して $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < q^{-2-\varepsilon/2}$ を満たす既約分数 $\frac{p}{q}$ が無限に存在するはずである。一方、Liouville の定理により、ある $L > 0$ について常に $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Lq^2}$ が成り立つ。十分大きな q では $\frac{1}{Lq^2} > q^{-2-\varepsilon/2}$ となるため、これは矛盾である。

このようにして、無理数を有理数で近似するという素朴な問いは、無理数度という量を通して、数の性質を測る理論へと発展していったのである。ただしこのトピックをこれ以上深掘りすると本稿の主題からは離れてしまうので、ここでは最後に 20 世紀に Roth が示したロスの定理 [Rot55] を紹介するにとどめる。

定理 1.1.9. α が代数的無理数であるとき、その無理数度は 2 である。

この定理は、リュービルの定理を決定的に強化するものである。2 次無理数だけでなく、すべての代数的無理数は無理数度 2 を超えることができない。したがって、無理数度が 2 を超える無理数は必ず超越数であり、ロスの定理は超越数判定の強力な十分条件も与えている。

1.1.2 ラグランジュ定数とマルコフ定数の最小値問題

ディリクレの定理とリュウビルの定理を踏まえると、任意の無理数 α に対して $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$ を満たす有理数 $\frac{p}{q}$ は $n = 2$ までは無限に存在するが、指数をこれ以上引き上げることは一律には不可能である。そこで次に自然に現れるのが、指数を $n = 2$ に固定したうえで、定数 L をどこまで大きくできるかという問題である。

実数 α に対し、 $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Lq^2}$ を満たす有理数 $\frac{p}{q}$ が無限個存在するような L の上限を、 α の**ラグランジュ定数**と呼び、 $\mathcal{L}(\alpha)$ で表す。上の問題は、ラグランジュ定数が取りうる最小値を問う問題である。この答えは Hurwitz が 1891 年に与えた [Hur91]。

定理 1.1.10. 任意の無理数 α について $\mathcal{L}(\alpha) \geq \sqrt{5}$ であり、たとえば $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ では $\mathcal{L}(\alpha) = \sqrt{5}$ となる。

さらに Hurwitz は、 $\sqrt{5}$ の次に小さいラグランジュ定数が $2\sqrt{2}$ であることも述べており、この事実は Markov の研究から得られるものだと記している。ただし、[Hur91] ではこの点の証明は与えられておらず、言及にとどまっている。ここでいう Markov の研究とは、1879 年の論文 [Mar79] に始まる不定 2 次形式の研究である。Markov は、2 変数 2 次形式 $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ に対し、判別式を $D = b^2 - 4ac$ とおいたとき、 $\inf_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |Q(x, y)| = \sqrt{D}/M(Q)$ によって定まる量 $M(Q)$ を考え、その値が小さくなる 2 次形式を連分数理論に帰着して調べた。最小値は $Q(x, y) = x^2 - xy - y^2$ によって与えられる $M(Q) = \sqrt{5}$ であり、次に小さい値は $Q(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$ によって与えられる $M(Q) = 2\sqrt{2}$ である。このラグランジュ定数の問題とマルコフ定数の問題はどちらも連分数を用いて解かれており、この類似性を Hurwitz は見抜いたのであった。ここに、ディオファントス近似理論と 2 次形式論とが合流する道筋が現れるのである。なお Markov の研究は続く論文 [Mar80] でさらに精密化され、現在**マルコフの定理**と呼ばれる結果に到達する（時系列的には Hurwitz がラグランジュ定数に Markov の研究を応用できることに気がつくよりも 10 年ほど前の話である）。

定理 1.1.11 (マルコフの定理). $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ の正整数解に現れる正整数全体の集合を M とする。3 未満のマルコフ定数全体の集合を \mathcal{M}_0 とすると、

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m} \mid m \in M \right\}$$

が成り立つ。

M の元は**マルコフ数**と呼ばれる。マルコフ定数とは別の対象なので、用語の違いに注意しておきたい。この定理は、3 未満のマルコフ定数がマルコフ数によって完全に記述されることを意味している。たとえばマルコフ数 1 からは $\sqrt{5}$ が、マルコフ数 2 からは $2\sqrt{2}$ が得られる。これらの値は、連分数理論を介してラグランジュ定数としても現れるが、その関係が明確な形で整理されるには、さらに少し時間を要する。

1.1.3 ラグランジュ/マルコフスペクトラムの研究

最小のラグランジュ定数やマルコフ定数の問題が解かれた後、数学者の関心は、これらの定数全体がどのような集合をなすかという問題へ向かう。ラグランジュ定数全体の集合を \mathcal{L} 、マルコフ定数全体の集合を \mathcal{M} とおく。これらはそれぞれラグランジュスペクトラム、マルコフスペクトラムと呼ばれる*1。これらの集合が連分数によって記述できることは、現在では次のように定式化されている。

定理 1.1.12. 両側無限列 $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{\mathbb{Z}}$ に対して、

$$\ell_n(\mathbf{a}) := [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] + [0; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots]$$

とおく。このとき、

$$\mathcal{L} = \left\{ \limsup_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{\mathbb{Z}} \right\}, \quad \mathcal{M} = \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{\mathbb{Z}} \right\}$$

が成り立つ。

この特徴づけは、Perron の論文 [Per21] において、証明を伴わずに現れる。後者の等式については、Markov の論文 [Mar79] の時点で本質的な内容がすでに到達されていたと見るのが自然であるが、上のような形で明示されたものとしては Perron のものが重要視された。そのため、これらの等式はペロンの恒等式と呼ばれることが多い。ペロンの恒等式によって、ラグランジュスペクトラムとマルコフスペクトラムは、ともに両側無限連分数列上の関数の上極限あるいは上限として扱えるようになる。この視点から、少し議論を挟むことで $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ であることも自然に理解できる。また、3 未満の範囲では両者は完全に一致し、ラグランジュ定数もマルコフの定理と同じくマルコフ数で記述される。

定理 1.1.13. 3 未満のラグランジュ定数について、

$$\mathcal{L} \cap (-\infty, 3) = \left\{ \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m} \mid m \in M \right\}$$

が成り立つ。

ペロンの恒等式以降、 \mathcal{L} や \mathcal{M} の 3 以上の領域について多くの研究が行われてきた。以下の話題は本稿の主筋からはやや外れるが、スペクトラムの全体像を知るうえで重要な結果をいくつか紹介しておく。まず、 $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ であることは先述したが、この包含が真の包含であることが Freiman によって示された [Fre68]。

定理 1.1.14. $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{M}$ が成り立つ。すなわち、 $\mathcal{M} \setminus \mathcal{L} \neq \emptyset$ である。

また他に、歴史的に重要な定理が Hall によって 1947 年に示された [Hal47]。

定理 1.1.15. $[6, \infty)$ は \mathcal{L} に含まれる。したがって、 $[6, \infty)$ は \mathcal{M} にも含まれる。

*1 ラグランジュスペクトラムについても Markov の貢献は大きいので、マルコフ・ラグランジュスペクトラムと呼ぶべきだという意見もあり、筆者もその立場に共感している。ただし、本稿では名称が長くなること、およびマルコフスペクトラムとの混同を避けることを考慮し、こちらの呼称を用いる。

これは、十分大きなすべての実数がラグランジュスペクトラム、したがってマルコフスペクトラムにも含まれることを示す結果である。このような半直線は**ホールの半直線**と呼ばれる。さらに Freiman は 1975 年に、この半直線の最小の始点を決定した [Fre75]。

定理 1.1.16. \mathcal{L} に含まれる最大の半直線は $[c_F, \infty)$ であり、その始点は

$$c_F = \frac{2221564096 + 283748\sqrt{462}}{491993569} \approx 4.5278295661\dots$$

で与えられる。特に $c_F \in \mathcal{L}$ である。

この c_F は**フレイマン定数**と呼ばれる。この結果から、 $[c_F, \infty)$ では \mathcal{L} も \mathcal{M} も実数の半直線全体を含むため、両者の違いは 3 以上 c_F 未満の範囲に集中して現れることになる。

残る区間 $[3, c_F)$ における \mathcal{L} と \mathcal{M} の構造は、現在も活発に研究されている。たとえば Moreira は 2018 年に、ハウスドルフ次元の観点から次の結果を示した [Mor18]。

定理 1.1.17. 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、 $\dim_H(\mathcal{L} \cap (-\infty, t)) = \dim_H(\mathcal{M} \cap (-\infty, t))$ が成り立つ。この共通の値を $d(t)$ とおくと、 $d(t)$ は広義単調増加であり、 $\max\{t \in \mathbb{R} \mid d(t) = 0\} = 3$ が成り立つ。

さらに 2024 年には、Erazo–Lima–Matheus–Moreira–Vieira によって次の結果が得られた [ELM+24]。

定理 1.1.18. $\inf(\mathcal{M} \setminus \mathcal{L}) = 3$ である。

これらの結果から、 \mathcal{L} と \mathcal{M} は $[3, c_F)$ の中で大域的には非常に近いフラクタル構造を持つ一方、集合としての差は 3 を超えた直後から現れることがわかる。このように、ラグランジュスペクトラムとマルコフスペクトラムの研究は、古典的な連分数論から出発しながら現在もなお発展を続けているのである。

1.1.4 マルコフ数と既約分数

ラグランジュ/マルコフスペクトラムの 3 未満の部分を記述するマルコフ数は、もともとの動機であったディオファントス近似理論を離れてさまざまな文脈で研究されている。そのきっかけとなったのが Frobenius が 1913 年の論文 [Fro13] である。この論文ではマルコフ数と既約分数を対応づけている。この対応は、マルコフ数が、有理数、格子点、平面上の線分と深く結びついていることを示すものであり、現代のマルコフ数研究においても基本的な役割を果たしている。

この関係を説明するために、まず 1 以上の正の既約分数 $t = \frac{p}{q}$ を 1 つとる。Frobenius はこの分数から次の手順で整数 m_t を構成した。

- (1) 各 $i = 0, 1, \dots, p+q$ に対して、 iq を $p+q$ で割った余りを r_i とおく。次に、各 $i \in \{1, 2, \dots, p+q-1\}$ について、 $r_i < r_{i+1}$ ならば文字 c を 1 つ、 $r_i > r_{i+1}$ ならば文字 d を 1 つ書く。このようにして、 c, d からなる語 s を作る。
- (2) s の各 c を 1, 1 に、各 d を 2, 2 に置き換えて整数列 S を作る。その S を用いて連分数 $[2; S, 2]$ を考え、その既約分数表示における分子を m_t とする。

このとき次の定理が成り立つ。

定理 1.1.19. 上の方法で構成した m_t はマルコフ数となる。さらに、 $t \mapsto m_t$ は 1 以上の既約分数全体から、1 以外のマルコフ数全体への写像を与える。

この定理の画期的な点は主に 2 つある。1 つは、マルコフ数を既約分数でラベル付けできるようになったことである。マルコフ数はもともとマルコフ方程式の正整数解の中に現れる数として定義されるので、そのままでは各マルコフ数の位置づけが見えにくい。これに対して既約分数によるラベルを入れると、マルコフ数全体に座標を与えたような形になり、個々のマルコフ数をずっと扱いやすくなる。この考え方は現在でも標準的であり、本稿でも「分数ラベル」という形で同じ発想を用いる。

もう 1 つの重要な点は、この構成が平面上の図形を用いて自然に理解できることである。点 $(0, 0)$ と $(p+q, q)$ を結ぶ線分を l とすると、 l と直線 $x = i$ との交点の y 座標は $\frac{iq}{p+q}$ である。その小数部分は $\frac{r_i}{p+q}$ にほかならない。したがって、 r_i の増減を調べることは、線分 l が各縦帯 $i \leq x \leq i+1$ の中でどのように動いているかを見ていることになる。ここで $\frac{q}{p+q} < 1$ であるから、 l は各縦帯の中で高々 1 本の横格子線としか交わらない。そこで $r_i < r_{i+1}$ ならばその帯の中では横格子線と交わらず、 $r_i > r_{i+1}$ ならばちょうど 1 本の横格子線を横切ることになる。つまり、語 s は合同式の計算で作られているように見えて、実際には有理傾きをもつ線分が整数格子をどのように横切るかを記録したもになっているのである。

この観点はマルコフ方程式の正整数解という整数論的な対象が、平面上の格子線分や語の組合せ論と直接につながっていることを示唆しており、これが後続の研究につながっていくのである。Frobenius はまた、マルコフ数に関する素朴でありながら非常に重要な予想を提示した。

予想 1.1.20 (フロベニウスの一意性予想). 任意のマルコフ数 c に対して、最大成分が c であるマルコフ方程式の正整数解は、成分の順序を除いて一意に定まる。

分数ラベルの言葉では、これは異なる既約分数が異なるマルコフ数を与えるか、という問題として理解できる。

予想 1.1.21. 分数ラベル $t \mapsto m_t$ は単射である。

見た目は簡潔であるが、この問題はマルコフ数の内部構造に深く関わる難問であり、現在でも完全には解決されていない。Frobenius の仕事は、マルコフ数を既約分数で記述する方法を与えただけでなく、その後長く研究される中心的な問題も同時に提示したのである。

1.1.5 マルコフ数の行列化と双曲幾何的解釈

1950 年代ごろから、マルコフ数をモジュラー群の元として実現する見方が発展する。転機の一つが、1955 年の Cohn の論文 [Coh55] である。Cohn は、モジュラー群 $SL(2, \mathbb{Z})$ の交換子部分群 $[SL(2, \mathbb{Z}), SL(2, \mathbb{Z})]$ に属する行列のトレースが、マルコフ方程式と密接に関係していることに着目した。[$SL(2, \mathbb{Z}), SL(2, \mathbb{Z})$] の生成元 A, B に対して、

$$(\operatorname{tr}(A))^2 + (\operatorname{tr}(B))^2 + (\operatorname{tr}(AB))^2 = \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B) \operatorname{tr}(AB)$$

という関係式が現れる。これは $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ という方程式を与えるが、マルコフ方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ とは定数倍を除いて同じ情報を持つ。実際、マルコフ方程式の解 (a, b, c) から $(3a, 3b, 3c)$ を作ると前者の解になり、逆に前者に現れる正整数解は 3 で割ることでマルコフ方程式

の正整数解を与える。こうして、マルコフ方程式は行列のトレースの問題としても捉えられるようになる。

Cohn の仕事の重要性は、単にマルコフ方程式に似た式が現れることを指摘した点にとどまらない。彼は行列 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して 2 次形式 $Q(x, y) = cx^2 + (d - a)xy - by^2$ を対応させ、Markov が研究していた不定 2 次形式の最小値問題を行列の言葉で読み直す視点を与えた。これにより、連分数や 2 次形式の理論の中で現れていたマルコフ数が、離散群の理論の中でも自然に現れることが明らかになった。この流れは、1971 年の Cohn の論文 [Coh71] でさらに双曲幾何的な解釈へとつながる。上半平面 $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ に交換子部分群を作用させると、その商として 1 点穿孔トーラスが得られる。このとき、群の元の共役類はトーラス上の閉曲線の自由ホモトピー類に対応し、とくに原始的な双曲元は単純閉測地線に対応する。対応する行列を A 、測地線の長さを $\ell(A)$ と書けば、 $|\operatorname{tr}(A)| = 2 \cosh(\frac{\ell(A)}{2})$ が成り立つ。したがって、トレースの値がマルコフ数の 3 倍として現れるという事実は、マルコフ数が 1 点穿孔トーラス上の単純閉測地線の長さとして直接結びついていることを意味している。この双曲幾何的な解釈は、前小節で述べた分数ラベルとも深く関係している。1 点穿孔トーラスを点がついている普通のトーラスだと思って普遍被覆を考えると、そこには格子点付きの平面が現れる。トーラス上の原始閉曲線は、この平面上では格子点を結ぶ有理傾きの直線として表される。したがって、分数ラベルは、トーラス上の閉曲線を普遍被覆の平面上で見たものとの関係が深いことがわかる。この意味で、マルコフ数の理論は、既約分数・格子線分・連分数・2 次形式・行列・双曲曲面という、一見すると別々に見える対象を結びつける理論として理解できる。これらの系譜は、のちに Penner の飾り付きタイヒミュラー理論 [Pen87] へ、さらに団代数理論による再解釈へとつながっていく。

1.1.6 団代数理論と一般化マルコフ数

21 世紀初頭に Fomin–Zelevinsky の論文 [FZ02, FZ07] と Fock–Goncharov の論文 [FG06, FG09] によって導入・発展した団代数理論は、マルコフ数の理論にも大きな影響を与えている。団代数は、団変数と呼ばれる元からなる団と呼ばれる集合と、変異と呼ばれる団変数の入れ替え操作をもとに生成される代数で、曲面に付随する組合せ論と深く結びついている。曲面に付随する団代数では、弧が団変数に、三角形分割が団に、フリップ（三角形分割の弧を 1 つ入れ替えて別の三角形分割にする操作）が変異に対応し、飾り付きタイヒミュラー空間における λ 長さと呼ばれる計量を通じて団変数は曲面上の弧に付随する幾何量として実現される。こうして、曲面の三角形分割の組み換えを、代数の中の変数変換として読むことができるようになる。曲面が 1 点穿孔トーラスの場合、この枠組みは古典的なマルコフ数の理論と直接につながる。この曲面に付随するマルコフ型団代数では、団変数を適切に特殊化するとマルコフ数が現れ、1 つの団に属する 3 つの変数はマルコフ方程式の解を与える。これまでに現れた分数ラベル、格子線分による組合せ論、コーン行列、1 点穿孔トーラス上の閉曲線は団代数という共通の言葉のもとに整理されるのである。

団代数研究の流れは、Chekhov–Shapiro によって [CS14] で導入された一般化団代数によって押し広げられた。一般化団代数は通常の団代数における変異の際の変換規則を一般化して得られる、団代数を含むより広いクラスの代数である。そこで自然に生じるのが、古典的なマルコフ型団代数に見られる対称性や良い組合せ論が、この一般化された状況でもどこまで残るのか、という問いである。本稿の主題の一つである、筆者と松下が [GM23b] で導入した一般化マルコフ数は、まさにこの問題意

識のもとで現れた。古典的なマルコフ数が、マルコフ型団代数を通して既約分数・格子線分・トーラス上の曲線と結びついていることを踏まえ、筆者らは Chekhov–Shapiro の一般化団代数の中にも、古典的マルコフ型団代数とよく似た性質を持つ良いクラスが存在するのではないかと考えた。その結果として現れたのが、古典的マルコフ方程式を拡張する次の方程式である。

$$x^2 + y^2 + z^2 + k_1yz + k_2zx + k_3xy = (3 + k_1 + k_2 + k_3)xyz.$$

ここで k_1, k_2, k_3 は非負整数であり、この方程式の正整数解に現れる整数を (k_1, k_2, k_3) 一般化マルコフ数と呼ぶ。

重要なのは、この方程式が古典的マルコフ方程式を単に形式的に変形したものではないという点である。一般化団代数の中で、古典理論に似た対称性と変異による生成構造を保とうとすると、この形が自然に現れる。したがって、一般化マルコフ数の理論は、古典的マルコフ数の類似問題というだけでなく、古典理論の背後にあった構造をより広い範囲で捉え直す試みとして理解できる。実際、その後の研究では、古典理論にあったさまざまな側面が一般化マルコフ数に対しても再構成されている。筆者と丸山による論文 [GM23a] ではコーン行列が一般化され、さらに筆者・丸山・佐藤による論文 [GMS24] ではフロベニウス型の組合せ論が一般化マルコフ数の理論へ拡張された。古典理論において存在している既約分数・語・連分数・マルコフ数・行列・曲線といった概念の間の関係性が、一般化マルコフ数に対しても成り立つことが見えてきたのである。さらに筆者の単著 [Gyo25] では、ついにこの一般化マルコフ数の理論がラグランジュ/マルコフスペクトラムの理論へと再接続された。具体的には次の定理を証明している。

定理 1.1.22. m を (k_1, k_2, k_3) 一般化マルコフ数とし、この数が (k_1, k_2, k_3) 一般化マルコフ方程式の正整数解の第 i 成分に現れるとする。このとき、

$$\frac{\sqrt{((3 + k_1 + k_2 + k_3)m - k_i)^2 - 4}}{m} \in \mathcal{L}$$

である。したがって特に

$$\mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3} := \left\{ \frac{\sqrt{((3 + k_1 + k_2 + k_3)m - k_i)^2 - 4}}{m} \mid \begin{array}{l} m \text{ は } (k_1, k_2, k_3) \text{ 一般化マルコフ} \\ \text{方程式の正整数解の第 } i \text{ 成分に} \\ \text{含まれる } (k_1, k_2, k_3) \text{ 一般化マルコフ数} \end{array} \right\}$$

とすると $\mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3} \subset \mathcal{L}$ が成り立つ。

$(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$ とすることでマルコフの定理の片側が復元されることに注意せよ。この値をラグランジュ定数（マルコフ定数）として与える無理数（または2次形式）も、1点穿孔トーラスの単純閉曲線を用いて具体的に与えられる。この定理の証明手法は古典的なマルコフの定理の安直な一般化ではなく、マルコフ数の組合せ論を団代数論をもとに再解釈した結果生まれた新しい視点もたらしたものであった。これらの事実は、一般化マルコフ数の理論が古典理論の周辺的な変形ではなく、古典理論がもともと持っていた数論的・幾何学的・組合せ論的な構造を、より広い文脈の中で組み直す試みであることを示している。一般化マルコフ数は、その意味で古典的マルコフ数の自然な拡張として位置づけられているのである。

1.2 本稿の構成

本稿は、第 I 部でラグランジュスペクトラムとマルコフスペクトラムの古典理論を整備し、第 II 部で一般化マルコフ数の理論を導入したうえで、それを用いて一般化離散マルコフスペクトラムを構成し、最後に古典的なマルコフの定理をその枠組みの中に位置づけ直す、という流れで構成されている。

第 2 章では、以後の議論の基礎となる連分数理論をまとめる。ここでは既約分数と有限正則連分数の基本性質を確認した後、無限正則連分数、近似分数、連分数行列、さらにユニモジュラー群の作用による無理数の軌道分解を扱う。最後に循環連分数と 2 次無理数の対応を述べることで、第 3 章と第 4 章でラグランジュ定数・マルコフ定数を 2 次無理数や 2 次形式に結びつける準備を行う。

第 3 章ではラグランジュスペクトラムを扱う。まずラグランジュ定数の定義と基本例を述べ、近似分数列から得られる量の上極限としてラグランジュ定数を捉える。ついで、両側無限列を用いた表示を導入することで、次の章に出てくるマルコフ定数との比較が可能な形で定式化する。さらに 2 次無理数の場合には、 $GL(2, \mathbb{Z})$ 同値によって簡約 2 次無理数へ帰着し、周期部分とそれに付随する行列からラグランジュ定数を具体的に計算できることを示す。これにより、第 5 章以降で必要となる周期列から値を計算する方法が確立される。

第 4 章ではマルコフスペクトラムに話題を移す。まず 2 変数 2 次形式に対するマルコフ定数を定義し、標準簡約 2 次形式とユニモジュラー群軌道を用いてその代表元を整備する。続いて、ラグランジュスペクトラムと平行な形で、マルコフ定数を両側無限列で表す。そのうえで、有理数係数 2 次形式のマルコフ定数が、それと対応する 2 次無理数のラグランジュ定数と一致することを示し、2 次無理数・有理数係数 2 次形式・循環両側無限列という三つの対象が同じ値を与えることを明確にする。これは後半で一般化理論をスペクトラムの言葉に接続する際の要石である。

第 5 章から第 II 部に入り、一般化マルコフ方程式と一般化マルコフ数を導入する。ここではまず (k_1, k_2, k_3) 一般化マルコフ方程式の定義と基本性質を述べ、古典的なマルコフ木に対応する一般化マルコフ木を構成する。さらに、ファレイ木との対応を通じて一般化マルコフ数に分数ラベルを与え、各頂点に現れる数を既約分数で組織的に扱えるようにする。章末では特性数を導入し、後に一般化コーン行列の成分を記述するための補助量を準備する。すなわちこの章の役割は、古典的な「マルコフ数と分数ラベル」の図式を一般化された状況へ移植し、以後の計算に必要な情報を整備することである。

第 6 章では、前章で得た一般化マルコフ数を組合せ論・幾何の言葉で記述するために、フェンス型順序集合と一般化マルコフ距離を導入する。まず、有限整数列にフェンス型順序集合を対応させ、その順序イデアルの個数が連分数・連分数行列と密接に結びつくことを示す。次に、重複をもつフェンス型順序集合の間のスケイン関係式を証明し、積の恒等式として順序イデアルの数を制御する。最後に、平面上の曲線や一般化弧に一般化マルコフ長を割り当て、その最小化として一般化マルコフ距離を定義する。これにより、一般化マルコフ数の理論が抽象的な整数列の操作ではなく、曲線の交差と解消を伴う幾何学的対象として理解できるようになる。

第 7 章では一般化コーン行列を導入し、前章までに現れた数や曲線の情報を 2×2 行列の言葉へ移す。まず一般化コーン木を定義し、一般化コーン行列の成分が一般化マルコフ数と特性数を用いて具体的に記述できることを示す。ついで特性数の関係式を証明し、最後に一般化強許容数列を導入し

て、一般化コーン行列が基本行列の積として表されることを示す。この章では第5章の算術的データと第6章の組合せ・幾何的データが、行列表示を通じて一つに統合される。とりわけ、古典理論で重要な役割を果たすコーン行列が、一般化された状況でも本質的な役割を担うことがここで明確になる。

第8章では、以上の準備を受けて一般化離散マルコフスペクトラムを定義し、本稿の主定理を証明する。まず、一般化マルコフ数から構成される離散的な値の族を定義し、それらが実際に2次無理数のラグランジュ定数や有理数係数2次形式のマルコフ定数として実現されることを示す。次に、 $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$ の場合にこの一般理論を古典的マルコフの定理へ特殊化し、古典定理が本稿の一般化理論の中に自然に埋め込まれていることを示す。その後、有理数傾きで得られる一般化強許容列の無理数傾き極限を考え、点を通らない無理数傾きの直線から得られる両側無限列が境界値 $3 + k_1 + k_2 + k_3$ を与えることを証明する。さらに $(0, 0, 0)$ 型と $(2, 2, 2)$ 型の対応を論じ、最後にフロベニウスの一意性予想の一般化を考察する。

1.3 本稿の目的

ここで、本稿を書くに至った動機と本稿を通して何を読者に伝えたいのかということについて明確にしておこうと思う。筆者は以下の2つの目的を持って本稿を執筆している。

- (1) ラグランジュ/マルコフスペクトラムに関する新しい方向性の提示
- (2) ラグランジュ/マルコフスペクトラムの初学者向けの日本語文献の充実

以下、順に説明していく。

(1) ラグランジュ/マルコフスペクトラムに関する新しい方向性の提示

本稿で扱う筆者の論文 [Gyo25] は、ラグランジュ/マルコフスペクトラムと呼ばれる集合の元の一部を一般化マルコフ数を用いて与えるという内容の論文である。この論文の重要な点は、内容が既存の理論の安直な一般化ではないという点である（と個人的に思っている）。一般化される前のマルコフ数の理論では、マルコフ数からラグランジュ/マルコフ定数を計算する際にクリストッフェル語の理論とコーン行列の対応を使う方法が一般的である。ところがこの方法はかなりアドホックであり、一般化マルコフ数に対しては使えない。そこで筆者は団代数理論を使うことで、従来のマルコフ数のケースも包含し、かつ一般化マルコフ数全体も取り扱えるような新しい枠組みを構成した。これはマルコフ数だけを扱うよりも多少手間こそかかるものの、非常に見通しの良い理論であり、こちらの考え方を標準とした方が様々な研究の発展につながるのではないかと考えている。しかしこの内容の結果が書かれている筆者の論文は結果がいくつかの論文に散っていて流儀が各論文で微妙に異なっていたり、引用文献が団代数の知識を前提とした論文だったりして現状アクセスしやすいとは思えない状態である（これは筆者の力不足の結果であるともいえ、その点に関しては言い訳のしようがない）。どうすべきかと考えた結果、この新しいスタイルで書かれた入門書があればよいのではないかとの結論に至り本稿を執筆した。本稿の読者におかれましては、ぜひ本稿の内容が未来に残すほどの有用性を持つものなのかという視点で読んでいただきたく思う。

(2) ラグランジュ/マルコフスペクトラムの初学者向けの日本語文献の充実

第2の動機は、この分野の日本語文献の充実に関してである。現在、この分野の金字塔の定理であるマルコフの定理の証明を理解したいと思ったときに読むべき本として [CF89, Bom07, Aig13, Reu19]

が挙げられるが、これらはいずれも英語文献である。マルコフの定理の証明自体は大学数学の基本的な考え方が備わる数学科 1 年生修了程度の知識があれば理解できるだけに、英語が障壁になるのは非常にもったいないと感じている。最近は翻訳技術も進み、この辺りの障壁もなくなりつつあるが、それでも母国語で読む快適さと比べるとまだまだという感じであろう。本稿がディオファントス近似理論を学ぶ日本語ネイティブの学生の学習の一助となればと思い執筆した次第である。

謝辞

本稿を執筆するにあたりご助言いただいた Esther Banaian 氏に感謝申し上げます。

第I部

ラグランジュスペクトラムと マルコフスペクトラム

第2章

連分数

本稿のテーマは無理数の有理数近似である。無理数を扱う上で必要不可欠となるのがその無理数へ収束する連分数である。この章では3章以降で使われる連分数の基本性質について扱う。ただ連分数の基本性質とはいっても、実はその中のかかなりの部分が $GL(2, \mathbb{Z})$ の元の行列積に関する性質である。これは、連分数の計算が $GL(2, \mathbb{Z})$ の元の行列積として解釈できるうえに、行列式が連分数理論と良い相性を持つためである。

最初に既約分数の基礎事項について触れたのち、有理数の連分数展開、無理数の連分数展開について扱い、最後の節で Lagrange の結果である循環連分数を用いた2次無理数の特徴づけまでを取り上げる。

この章の内容は、構成も含め [木田 22] の3~6章をおおいに参考にしている。

2.1 既約分数

まずは既約分数の概念を導入する。これは多くの人にとって自明なことかもしれないが、今一度本稿で取り扱う定義を確認しておこう。

定義 2.1.1. 整数 $a, b \in \mathbb{Z}$ が $(a, b) \neq (0, 0)$ を満たしているとする。ある $k \in \mathbb{Z}$ が存在して $b = ak$ となるとき、 a は b の約数であるといい、 $a \mid b$ で表す。

ここでの約数の概念は a や b が0や負の数でも定義されることに注意せよ。例えば、任意の $a \neq 0$ に対して $a \mid 0$ は常に成立するので0以外の任意の整数は0の約数であり、逆に任意の $b \neq 0$ に対して $0 \mid b$ は常に成立しないので0は任意の整数の約数ではない。なお $(0, 0)$ は上の定義の対象から除外しているので、 $0 \mid 0$ は考えないこととする。

定義 2.1.2. a_1, \dots, a_n (ただしすべての a_i が同時に0ではないとする) の最大公約数 $\gcd(a_1, \dots, a_n)$ を、2条件

- (1) $d \mid a_i$ がすべての $i = 1, \dots, n$ に対して成り立つ
- (2) 整数 c が $c \mid a_i$ をすべての $i = 1, \dots, n$ に対して満たすならば、 $c \mid d$ が成り立つ

を満たす正の整数 d として定義する。

最大公約数は必ず存在することに注意せよ。

定義 2.1.3. a_1, \dots, a_n が

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$$

を満たすとき、 a_1, a_2, \dots, a_n は互いに素であるという。

この定義により、0 と 0 以外の数のペアや正と負の数のペアに対しても互いに素かどうかを判定できるようになる。

例 2.1.4. 定義に沿って、0 とそれ以外の 2 つの数が互いに素かどうかを判定してみよう。

- 1 の約数は ± 1 である一方、0 は 0 以外の任意の整数を約数に持つので、0 と 1 の最大公約数は 1 である。したがって 0 と 1 は互いに素である。
- 2 の約数は $\pm 1, \pm 2$ であるから、0 と 2 の最大公約数は 2 である。したがって 0 と 2 は互いに素ではない。
- 2 の約数は $\pm 1, \pm 2$ であり、 -3 の約数は $\pm 1, \pm 3$ なので、2 と -3 の最大公約数は 1 である。したがって 2 と -3 は互いに素である。

これを踏まえて、分数とその既約性の定義を行う。

定義 2.1.5. $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、 $(a, b) \neq (0, 0)$ とする。このとき、形式的な記号 $\frac{a}{b}$ を分数と呼ぶ。さらに a と b が整数かつ互いに素であり、かつ $b \geq 0$ であるとき $\frac{a}{b}$ は既約であるという。

この分数の定義についてはいくつかの注意が必要である。まず、 $\frac{a}{b}$ という記号は形式的なものであり、有理数そのものではない。 $b \neq 0$ のときは $\frac{a}{b}$ に実数 ab^{-1} を割り当てることで有理数と同一視が可能だが、たとえば分数としては $\frac{1}{0}$ のようなものも考えられ、これに対応する有理数は存在しないことに注意する。ただ、 $b \neq 0$ であるような分数は同一視を通して $\frac{a}{b}$ 自体を有理数と呼ぶことも許すことにし、また逆に有理数を表す記号として分数を用いることも許すことにする。だから、 $b \neq 0$ であれば有理数と分数の差はさほど気にしなくても良い。また本稿の既約分数の定義では、例えば整数 n に対応する既約分数は $\frac{n}{1}$ であり、また $\frac{1}{2}$ のような分数は既約ではないことに注意せよ。さらに、たとえば $\frac{2}{0}$ は既約分数ではないが $\frac{1}{0}$ や $\frac{-1}{0}$ は既約分数である。

2.2 有限正則連分数

この節と次の節で、連分数の基本的な性質を解説する。まず本節で有理数に対応する有限正則連分数を定義して、その性質を見よう。

定義 2.2.1. 実数成分の有限数列 $(a_i)_{i=0}^n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ を考える。この数列に対して、

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

とする。この各 a_i を部分商とよぶ。 $a_0 \in \mathbb{Z}$ かつ任意の $1 \leq k \leq n$ に対して $a_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ であり、かつ $n \neq 0$ のとき $a_n \neq 1$ という条件を考える。この条件を満たす連分数を有限正則連分数という。

最後の条件を課しているのは、 $[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, 1] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1} + 1]$ という表示の非一意性を避けるためである。

定義 2.2.2. $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ と $0 \leq k \leq n$ に対して、 $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ を k 番目の近似分数という。

近似分数の値に関しては、次の命題が重要である。

命題 2.2.3. 実数の有限列 (a_0, a_1, \dots, a_n) に対して、2つの漸化式

$$p_0 = a_0 \quad p_1 = a_0 a_1 + 1 \quad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \quad (2.2.1)$$

$$q_0 = 1 \quad q_1 = a_1 \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad (2.2.2)$$

を考える。このとき、任意の $0 \leq k \leq n$ に対して

$$[a_0; a_1, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$$

が成立する。さらに、 $2 \leq k \leq n$ ならば右辺は

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}$$

とも書ける。

証明. $[a_0] = \frac{p_0}{q_0}, [a_0; a_1] = \frac{p_1}{q_1}, [a_0; a_1, a_2] = \frac{p_2}{q_2}$ であることは直接計算から明らか。 $k \geq 3$ として、 $k-1$ までの命題の成立を仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} [a_0; a_1, \dots, a_k] &= [a_0; a_1, \dots, a_{k-1} + \frac{1}{a_k}] = \frac{(a_{k-1} + \frac{1}{a_k})p_{k-2} + p_{k-3}}{(a_{k-1} + \frac{1}{a_k})q_{k-2} + q_{k-3}} \\ &= \frac{a_k(a_{k-1}p_{k-2} + p_{k-3}) + p_{k-2}}{a_k(a_{k-1}q_{k-2} + q_{k-3}) + q_{k-2}} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{p_k}{q_k} \end{aligned}$$

より k でも成立することが示された。 \square

なおこの命題は $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ が有限正則連分数であることを仮定していないことに注意せよ。ここから補題 2.2.5 までは $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ が有限正則連分数であることを仮定しない。さて、近似分数の計算は、次の行列を用いた計算が便利である。

定理 2.2.4. 有限数列 (a_0, a_1, \dots, a_n) と $0 \leq k \leq n$ に対して $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$ とし、 p_k, q_k を (2.2.1), (2.2.2) で定める。このとき、

$$\begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

が成立する。

証明. $\begin{bmatrix} p_0 & p_{-1} \\ q_0 & q_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ であることは定義から直ちに従う。 $k \geq 1$ として、 $k-1$ までの定理の成立を仮定する。このとき

$$\begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k p_{k-1} + p_{k-2} & p_{k-1} \\ a_k q_{k-1} + q_{k-2} & q_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix}$$

となり、 k でも成立することが示された。 \square

これ以降、この $\begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix}$ を連分数 $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ に付随する**連分数行列**と呼ぶことにする。この定理から、次の補題が成り立つ。以下、 p_k, q_k を断りなく定理 2.2.4 で定められている意味で使用する。

補題 2.2.5. 有限数列 (a_0, a_1, \dots, a_n) と任意の $0 \leq k \leq n$ に対して

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k+1} \quad (2.2.4)$$

が成立する。

証明. 等式 (2.2.3) の両辺の行列式を取ることで示される。 \square

この補題から有限正則連分数に関する様々な性質が導かれることをみていこう。

系 2.2.6. $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ を有限正則連分数とする (ただし $a_n = 1$ の場合も許容する)。このとき、任意の $0 \leq k \leq n$ に対して $\frac{p_k}{q_k}$ は既約分数である。

証明. $n = 0$ の時は明らかであるから、 $n \neq 0$ とする。 $a_0 \in \mathbb{Z}$ かつ任意の $1 \leq k \leq n$ に対して $a_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ であることに注意せよ。漸化式の定義から明らかに $q_k > 0$ である。 p_k と q_k の最大公約数を d_k として、 $p_k = d_k p'_k, q_k = d_k q'_k$ とする。

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = d_k (p'_k q_{k-1} - q'_k p_{k-1}) = (-1)^{k+1}$$

が成立する。このとき、 $d_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, p'_k q_{k-1} - q'_k p_{k-1} \in \mathbb{Z}$ であることから $d_k = 1$ となる。したがって示された。 \square

系 2.2.7. $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ を有限正則連分数とする (ただし $a_n = 1$ も許容するものとする)。このとき、数列 (q_1, \dots, q_n) は単調増加かつ任意の $1 \leq k \leq n$ に対して $q_k \geq k$ である。

証明. 各 q_k について帰納法で $q_k \geq k$ を証明する。 $k = 1$ のときは定義から明らかである。 $k \geq 2$ として $k - 1$ での成立、すなわち $q_{k-1} \geq k - 1$ を仮定する。このとき、

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \geq q_{k-1} + 1 \geq k - 1 + 1 = k$$

となり証明される。単調増加性も上の不等式から直ちに証明される。 \square

上記の系から補題 2.2.5 は次の形に変形できる。

系 2.2.8. $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ を有限正則連分数とする (ただし $a_n = 1$ も許容するものとする)。このとき、任意の $1 \leq k \leq n$ に対して

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k-1}} \quad (2.2.5)$$

が成り立つ。

証明. (2.2.4) を両辺 $q_k q_{k-1}$ で割ることで得る。 \square

系 2.2.9. $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ を有限正則連分数とする (ただし $a_n = 1$ も許容するものとする)。このとき、 $1 \leq 2k + 2\ell + 1 \leq n$ を満たす任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して、

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k+2\ell}}{q_{2k+2\ell}} < \frac{p_{2k+2\ell+1}}{q_{2k+2\ell+1}} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

が成立する。

証明. まず $\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k+2\ell}}{q_{2k+2\ell}}$ と $\frac{p_{2k+2\ell+1}}{q_{2k+2\ell+1}} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$ を示す。 $2 \leq m \leq n$ を満たす m について、

$$\begin{aligned} \frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m-2}}{q_{m-2}} &= \frac{p_m q_{m-2} - p_{m-2} q_m}{q_m q_{m-2}} = \frac{(a_m p_{m-1} + p_{m-2}) q_{m-2} - p_{m-2} (a_m q_{m-1} + q_{m-2})}{q_m q_{m-2}} \\ &= \frac{a_m (p_{m-1} q_{m-2} - q_{m-1} p_{m-2})}{q_m q_{m-2}} = \frac{(-1)^m a_m}{q_m q_{m-2}} \end{aligned}$$

となる。最後の等式は (2.2.4) から従う。 $a_m > 0$ であるから、 $m = 2k + 2$ とすることで $\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}}$ が、 $m = 2k + 3$ とすることで $\frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$ が従う。これは求めたい不等式の $\ell = 1$ の場合である。一般の ℓ についての不等式 $\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k+2\ell}}{q_{2k+2\ell}}$ と $\frac{p_{2k+2\ell+1}}{q_{2k+2\ell+1}} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$ は上記の不等式を繰り返し適用することで不等号の推移性から成り立つことがわかる。

次に、 $\frac{p_{2k+2\ell}}{q_{2k+2\ell}} < \frac{p_{2k+2\ell+1}}{q_{2k+2\ell+1}}$ を示す。(2.2.5) の k を $2k + 2\ell + 1$ に置き換えることで

$$\frac{p_{2k+2\ell+1}}{q_{2k+2\ell+1}} - \frac{p_{2k+2\ell}}{q_{2k+2\ell}} = \frac{(-1)^{2k+2\ell+2}}{q_{2k+2\ell+1} q_{2k+2\ell}} > 0$$

となり、示された。 □

系 2.2.9 は添え字がごちゃごちゃしていて一見するとどうい主張なのか掴みづらいかもしれないが、これをすべての k に適用することで

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

が成り立つことになる。こっちの方がわかりやすいかもしれない。

この節の最後に、有理数と有限正則連分数の間の全単射対応を証明する。まず有限正則連分数を与える有限数列の集合を定義しよう。そのまま安直に有限数列として集めてくると数列の長さがバラバラなので、元自体は無限数列としておいて、あるところから先の成分をすべて 0 とすることで有限数列を表すこととする。まず、集合 \mathcal{A} を次で定義する。

$$\mathcal{A} := \{(a_k)_{k=0}^\infty \mid a_0 \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ に対して } a_i = 0\}.$$

ここで、 $z: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}$ を $z((a_k)_{k=0}^\infty) = a_0$ で定めるとこれは明らかに全単射である。これは、整数とそれに対応する有限連分数展開の間の全単射写像を与える。続いて、整数以外の有理数について考えよう。集合 \mathcal{Q} を次で定義する。

$$\mathcal{Q} := \{(a_k)_{k=0}^\infty \mid a_0 \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ s.t. } a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, i \in \mathbb{Z}_{\geq n+1} \text{ に対して } a_i = 0\}.$$

そして、 $f: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ を $f((a_k)_{k=0}^\infty) = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ (ただし n は $a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ かつ任意の $i \in \mathbb{Z}_{\geq n+1}$ に対して $a_i = 0$ となる整数とする) で定める。この写像が全単射であることは非自明なので、以下で逆の対応を構成する。まず、次の補題を証明する。

補題 2.2.10. $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ に対して、

$$\alpha_0 = \alpha, \quad a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor, \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} \tag{2.2.6}$$

のルールを適用して α_k と a_k を帰納的に構成すると、 $a_n = \alpha_n$ を満たす $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ が常に存在する(したがって、この操作はこれ以上続けることができなくなる)。

証明. まず、 $\alpha = \alpha_0 = \frac{r_0}{s_0}$ とする。ただし、 $\frac{r_0}{s_0}$ は既約分数であるとする。ここで $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ なので $s_0 \geq 2$ である。さて α_k は ($a_{k-1} = \alpha_{k-1}$ とならない限り) 有理数であるから、これを $\alpha_k = \frac{r_k}{s_k}$ (既約分数) と定める。このとき、 $s_k = 1$ ならば $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ なので $a_k = \alpha_k$ である。したがって $n = k$ とすれば条件を満たす。 $s_k \geq 2$ であるとする。このとき

$$\alpha_k - a_k = \frac{r_k}{s_k} - a_k = \frac{r_k - a_k s_k}{s_k}$$

となる。 $\alpha_k - a_k \neq 0$ より $0 < \alpha_k - a_k < 1$ なのでこれを変形して $0 < r_k - a_k s_k < s_k$ を得る。定義より $\alpha_{k+1} = \frac{s_k}{r_k - a_k s_k}$ で、これが $\frac{r_{k+1}}{s_{k+1}}$ に一致する。すると $\frac{r_{k+1}}{s_{k+1}}$ の既約性から、 s_{k+1} は $r_k - a_k s_k$ の約数である。したがって $s_{k+1} \leq r_k - a_k s_k < s_k$ となる。以上の議論から、 $s_k \geq 2$ である限り常に $s_{k+1} < s_k$ が成り立っている。すなわち s_i は単調減少する。既約性の仮定から $s_k \geq 1$ なので、必ず $s_n = 1$ となるような n が存在することがわかる。このとき $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ なので $a_n = \alpha_n$ である。以上から示された。□

注 2.2.11. 補題 2.2.10 で与えられている操作はユークリッドの互除法に他ならない。あとの節で全く同じことを無限連分数で行う。

定理 2.2.12. $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ に対して、(2.2.6) によって $a_n = \alpha_n$ を満たす最小の n をとり、 n 番目までの有限数列 $(a_k)_{k=0}^n$ を考える。このとき、 $n+1$ 番目以降を 0 にして延長した無限数列 $(a_k)_{k=0}^\infty$ は \mathcal{Q} に属する。

証明. 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、 $a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$ なので $a_k \in \mathbb{Z}$ であることはよい。また $\alpha \notin \mathbb{Z}$ なので $n \neq 0$ である。したがって定理を証明するためには、 $a_1, \dots, a_{n-1} \geq 1$ かつ $a_n \geq 2$ を示せば十分である。任意の $0 \leq k \leq n-1$ に対して $\alpha_k - a_k \neq 0$ なので $0 < \alpha_k - a_k < 1$ が成り立っている。したがってこの逆数である α_{k+1} は $\alpha_{k+1} > 1$ を満たすため、 $a_{k+1} \geq 1$ がいえる。以上からまず、 $a_1, \dots, a_n \geq 1$ がいえた。最後に $a_n \geq 2$ を示す。 $a_n = 1$ と仮定すると、 $a_n = \alpha_n$ より $\alpha_n = 1$ である。すると (2.2.6) から $\alpha_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n} = a_{n-1} + 1$ なので、 $\alpha_{n-1} \in \mathbb{Z}$ となる。したがってこのとき $\alpha_{n-1} = a_{n-1}$ となり、 $a_j = \alpha_j$ を満たす添字が n より前に存在することになる。これは n の最小性に反する。以上から示された。□

定理 2.2.12 は、対応 $g: \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{Q}$ を $g(\alpha) = (a_k)_{k=0}^\infty$ で定めるとこれが写像として well-defined であることを意味している。ここまでで定義した写像 f, g を使って次の定理を示す。

定理 2.2.13. 写像 f と g は互いに逆写像である。したがって特に、 f は全単射写像である。

この定理を証明する前に、次の補題を導入する：

補題 2.2.14. 有限正則連分数 $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ について、 $a_0 = \lfloor [a_0; a_1, \dots, a_n] \rfloor$ が成立する。

証明. $n = 0$ のとき $\alpha = a_0$ であるから明らか。以下では $n \geq 1$ とする。 $a_0 \leq [a_0; a_1, \dots, a_n] < a_0 + 1$ を示せばよい。そのためには、 $0 < [0; a_1, \dots, a_n] < 1$ を示せばよい。 $n = 1$ の場合は、有限正則連分数の約束から末項 a_1 は 2 以上であるため、

$$[0; a_1] = \frac{1}{a_1} < 1$$

である。 $n \geq 2$ の場合は、

$$[0; a_1, \dots, a_n] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{[a_2; \dots, a_n]}} < \frac{1}{a_1} \leq 1$$

であり、正であることも明らかなので主張が従う。 \square

定理 2.2.13 の証明. まず $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}}$ を示す。そのためには次を示せば良い： $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ に対して、(2.2.6) を使って $(\alpha_k)_{k=0}^n$ と $(a_k)_{k=0}^n$ を構成すると、任意の $0 \leq k \leq n-1$ に対して

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_k, \alpha_{k+1}] = [a_0; a_1, \dots, a_n]$$

が成立する。まず最初の等式を示す。 $k=0$ のときは直接計算により明らかである。 $k \geq 1$ として $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, \alpha_k]$ であると仮定する。このとき、

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, \alpha_{k+1}] = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \alpha_k - a_k] = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, \alpha_k] = \alpha$$

が成り立つので欲しい等式を得る。2番目の等式は $k=n-1$ の場合を考えると $a_n = \alpha_n$ であるからそこから従う。以上から $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}}$ が示された。次に、 $g \circ f = \text{id}_{\mathcal{Q}}$ を示す。 $(b_k)_{k=0}^\infty \in \mathcal{Q}$ をとる。示すべきは、 $f((b_k)_{k=0}^\infty) = [b_0; b_1, \dots, b_n]$ としたときに (2.2.6) を用いて構成した $(a_k)_{k=0}^\infty$ (ただし、定義されていない項は0として補完されている) が $(b_k)_{k=0}^\infty$ に一致することである。補題 2.2.14 から、 $a_0 = b_0$ であることがまずわかる。したがって、

$$\alpha_1 = \frac{1}{[b_0; b_1, \dots, b_n] - b_0} = \frac{1}{[0; b_1, \dots, b_n]} = [b_1; b_2, \dots, b_n]$$

である。したがって再び補題 2.2.14 から $a_1 = b_1$ であることが示される。この手順を繰り返すことで、 $(a_k)_{k=0}^n = (b_k)_{k=0}^n$ であることが示される。さらに、 $\alpha_n = [b_n] = b_n = a_n$ なのでこの操作はここで止まることになり、 $i \geq n+1$ に対して $a_i = 0$ である。したがって $(a_k)_{k=0}^\infty = (b_k)_{k=0}^\infty$ となり、示された。 \square

ここで、 $\mathcal{L} \cup \mathcal{Q}$ に含まれる数列は有限正則連分数を与える数列に対応しており、また $z: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}$ と $f: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ が全単射であることから、特に次のことがわかる：

定理 2.2.15. 任意の有理数 α に対して値が α となるような有限正則連分数が一意的に存在し、その連分数を構成する数列は (2.2.6) で与えられる。

補題 2.2.10 は整数でない有理数に対する主張だが、整数の場合の手順も (2.2.6) の特別な場合として包含されていることに注意せよ。

定義 2.2.16. 値が有理数 α となるような有限正則連分数を、 α の有限 (正則) 連分数展開とよぶ。

2.3 無理数の無限連分数展開

前節で有限正則連分数と有理数が全単射で対応することを見たが、有限正則連分数を与える整数列を無限に0が現れないような無限列に拡張し、またその連分数の極限を考えることで連分数が表現する領域を無理数にまで拡張できることが知られている。この節ではその現象を正当化しよう。方針は

前節の最後の部分とほぼ同じだが、極限を扱っているため有理数の場合と比較するとやや繊細な議論が必要となる部分がある。まず、次の集合を考える：

$$\mathcal{S} := \{(a_k)_{k=0}^{\infty} \mid a_0 \in \mathbb{Z}, a_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1} (k \geq 1)\}.$$

これを用いて、有限正則連分数の無限版を次で定義する。

定義 2.3.1. $(a_k)_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{S}$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

を考える。これを**無限正則連分数**という。

数列 $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ が具体的にどういう形になっているのかを見せるために、無限正則連分数を

$$[a_0; a_1, a_2, \dots], \quad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

のように表すこともある。

無限正則連分数は定義に極限が入っているので、そもそも実数の値として与えられるかどうかすら非自明である。しかし、次の定理によってこの値が無理数であることが保証される。

定理 2.3.2. $(a_k)_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{S}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ は収束し、さらに無理数である。

証明. $b_k := [a_0; a_1, \dots, a_k]$ とすると、これは前節における $\frac{p_k}{q_k}$ である。系 2.2.9 の結果を無限数列に拡張することで、数列 $\{b_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ は単調減少かつ有界、 $\{b_{2k}\}_{k=0}^{\infty}$ は単調増加かつ有界であることがわかる。したがって、 $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k+1}$ と $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k}$ は実数として存在する。それぞれの値を α_1, α_2 として、 $\alpha_1 = \alpha_2$ を証明する。系 2.2.8 と系 2.2.7 から $k \geq 1$ に対して

$$0 < b_{2k+1} - b_{2k} = \frac{(-1)^{2k+2}}{q_{2k+1}q_{2k}} \leq \frac{1}{2k(2k+1)}$$

となるので、辺々 $k \rightarrow \infty$ とすることで $\lim_{k \rightarrow \infty} (b_{2k+1} - b_{2k}) = 0$ となる。以上から

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k+1} - \lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (b_{2k+1} - b_{2k}) = 0$$

を得る。したがって $\alpha_1 = \alpha_2$ が示された。次に $\alpha := \alpha_1 = \alpha_2$ として α が無理数であることを示す。いま任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $b_{2k} < \alpha < b_{2k+1}$ であることから、

$$0 < \alpha - b_{2k} < b_{2k+1} - b_{2k} < \frac{1}{q_{2k}q_{2k+1}}.$$

$b_{2k} = \frac{p_{2k}}{q_{2k}}$ を代入して辺々 q_{2k} 倍することで

$$0 < \alpha q_{2k} - p_{2k} < \frac{1}{q_{2k+1}}$$

となる。ここで、 α が有理数であると仮定して $\alpha = \frac{a}{b}$ (ただし $\frac{a}{b}$ は既約分数) とすると、

$$0 < a q_{2k} - b p_{2k} < \frac{b}{q_{2k+1}}$$

が成り立つ ($b > 0$ であることに注意せよ)。ここで、 $aq_{2k} - bp_{2k}$ は任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で整数である一方 $\frac{b}{q_{2k+1}}$ は系 2.2.7 より十分大きい k で 1 より小さくなるので矛盾する。よって α は無理数となり、示された。 \square

上記の定理から、対応 $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ を $F((a_k)_{k=0}^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, \dots, a_n]$ で定めると、この対応は写像として well-defined であることがわかる。次にこの写像の逆写像を構成する。そのために、まず以下の定理を示す。

定理 2.3.3. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対して、

$$\alpha_0 = \alpha, \quad a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor, \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} \tag{2.3.1}$$

のルールによって $(\alpha_k)_{k=0}^\infty$ と $(a_k)_{k=0}^\infty$ を構成する。このとき $(a_k)_{k=0}^\infty \in \mathcal{S}$ が成立する。

証明. 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、 $a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$ なので $a_k \in \mathbb{Z}$ であることはよい。さらに、任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して α_k は無理数である。実際、もしある k で α_k が有理数であったとすると $\alpha_{k-1} = a_{k-1} + \frac{1}{\alpha_k}$ なので α_{k-1} も有理数、これを繰り返すことで α_0 が有理数になってしまうので矛盾する。ここから任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ で $0 < \alpha_{k-1} - a_{k-1} < 1$ がわかるので、 $\alpha_k > 1$ が成り立つ。したがって a_k の定義から、任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ で $a_k \geq 1$ となる。以上から $(a_k)_{k=0}^\infty \in \mathcal{S}$ であることが示された。 \square

この定理における対応を $G: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{S}$ とする。すなわち、 $G(\alpha) = (a_n)_{n=0}^\infty$ (ただし $(a_n)_{n=0}^\infty$ は (2.3.1) によって構成される数列) である。このとき、 G が写像として well-defined であることが定理 2.3.3 からわかる。さて、この節の主定理は以下の定理である。

定理 2.3.4. 写像 F と G は互いに逆写像である。したがって特に、 F は全単射写像である。

この定理を証明する前に、次の補題を導入する：

補題 2.3.5. 無限正則連分数 $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, \dots, a_n]$ について、 $a_0 = \lfloor \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, \dots, a_n] \rfloor$ が成立する。

証明. $a_0 < \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, \dots, a_n] < a_0 + 1$ を示す。そのためには、 $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} [0; a_1, \dots, a_n] < 1$ を示せば良い。 n を十分大きく取って $[0; a_1, \dots, a_n]$ の k 番目の近似分数の値を $\frac{p_k}{q_k}$ と表すとき、定理 2.3.2 の証明において

$$\frac{p_0}{q_0} < \lim_{n \rightarrow \infty} [0; a_1, \dots, a_n] < \frac{p_1}{q_1}$$

であることがわかっている。いま $\frac{p_0}{q_0} = 0$ であり、 $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_1}$ である。 $a_1 \geq 1$ であるから、 $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} [0; a_1, \dots, a_n] < 1$ であることが示された。 \square

定理 2.3.4 の証明. まず $F \circ G = \text{id}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ を示す。そのためには次を示せば良い： $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対して、(2.3.1) を使って $(\alpha_k)_{k=0}^\infty$ と $(a_k)_{k=0}^\infty$ を構成する。このとき任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_k, \alpha_{k+1}] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, \dots, a_n]$$

が成立する。以下、まずは最初の等式を示す。 $k = 0$ のときは直接計算により明らかである。 $k \geq 1$ として $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, \alpha_k]$ であると仮定する。このとき、

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, \alpha_{k+1}] = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \alpha_k - a_k] = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, \alpha_k] = \alpha$$

が成り立つので欲しい等式を得る。次に $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, \dots, a_n]$ を示す。直前に示した等式と命題 2.2.3 から、任意の $n \geq 1$ で

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}] = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}$$

を得る。ここで、

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = -\frac{p_nq_{n-1} - q_n p_{n-1}}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} = -\frac{(-1)^{n+1}}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \quad (2.3.2)$$

が成り立つ。ただし最後の等式は (2.2.4) から従う。ここで $\alpha_{n+1} > a_{n+1}$ であるから

$$\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1} > a_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1} > n + 1$$

となる（最後の不等式は系 2.2.7 から従う）ので、

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} < \frac{1}{q_{n+1}q_n} < \frac{1}{n(n+1)} \quad (2.3.3)$$

が成立する。両辺 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ をとることで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = 0$ を得る。したがって、

$$\left| \alpha - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = 0$$

となり、 $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, \dots, a_n]$ を得る。以上から $F \circ G = \text{id}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ が示された。次に、 $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{S}}$ を示す。 $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{S}$ をとる。示すべきは、 $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} [b_0; b_1, \dots, b_n]$ としたときに (2.3.1) を用いて構成した $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ に一致することである。補題 2.3.5 から、 $a_0 = b_0$ であることがまずわかる。したがって、

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} [b_0; b_1, \dots, b_n] - b_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{[b_0; b_1, \dots, b_n] - b_0} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{[0; b_1, \dots, b_n]} = \lim_{n \rightarrow \infty} [b_1; b_2, \dots, b_n] \end{aligned}$$

である。したがって再び補題 2.3.5 から $a_1 = b_1$ であることが示される。この手順を繰り返すことで、 $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ であることが示される。□

この全単射によって、特に次のことがわかる：

定理 2.3.6. 任意の無理数 α に対して極限が α となるような無限正則連分数が一意的に存在し、その連分数を構成する数列は (2.3.1) で与えられる。

定義 2.3.7. 極限が無理数 α となるような無限正則連分数を、 α の無限（正則）連分数展開とよぶ。

無理数 α の無限連分数展開を途中で打ち切った有限連分数が α の「良い」近似であることは想像に難くないと思うが、実は逆に「良い」近似はすべて無限連分数展開を途中で打ち切った有限連分数になることも知られている。これを見ていこう。まずはこれまでの議論からしたがう不等式を導入する。

命題 2.3.8. α を無理数とする。その n 番目の近似分数を $\frac{p_n}{q_n}$ とすると、

$$\frac{1}{q_n q_{n+2}} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

が成り立つ。

証明. 後ろの不等式は (2.3.3) からしたがう。前の不等式は (2.3.2) の右辺の分母について

$(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n < ((a_{n+1} + 1)q_n + q_{n-1})q_n = (q_{n+1} + q_n)q_n \leq (a_{n+2}q_{n+1} + q_n)q_n = q_{n+2}q_n$
が成り立つことからしたがう。 \square

次の命題は無理数の無限連分数を途中で打ち切った有限連分数が「良い」近似であることを意味する。

命題 2.3.9. α を無理数とし、 $n \geq 1$ とする。その n 番目の近似分数 $\frac{p_n}{q_n}$ に対して、

$$\frac{p_n}{q_n} \neq \frac{p}{q}, \quad 0 < q \leq q_n$$

を満たす有理数 $\frac{p}{q}$ に対して

$$|q\alpha - p| \geq |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| > |q_n\alpha - p_n|$$

が成立する。とくに

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|$$

が成り立つ。

証明. $\frac{p}{q}$ が既約分数でない場合、これを約分しても命題の仮定を満たす。したがって、最初から $\frac{p}{q}$ は既約分数としても良い。命題 2.3.8 の前半の不等式から $\frac{1}{q_{n+1}} < |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$ が成り立ち、後半の不等式から $|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}$ が成り立つ。ここから

$$|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}} < |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| \quad (2.3.4)$$

が得られて最初の主張の後半の不等式がしたがう。前半の不等式を証明する。連立方程式

$$\begin{bmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

を考える。 $\begin{bmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ なのでこの連立方程式は解をもつ。これを解いて

$$c = (-1)^{n+1}(pq_{n-1} - p_{n-1}q), \quad d = (-1)^{n+1}(p_nq - q_np)$$

を得る。ここで $c, d \in \mathbb{Z}$ であることに注意する。また仮定から $d \neq 0$ である。 $c = 0$ の場合、連立方程式は $dp_{n-1} = p, dq_{n-1} = q$ となるので、

$$|q\alpha - p| = |d||q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| \geq |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$$

であるから目的の不等式を得る。次に $c \neq 0$ の場合を示す。仮定より $q \leq q_n$ である。もし c, d が同符号であれば、 $q = cq_n + dq_{n-1}$ より $q \geq q_n$ であり、等号が成り立つのは $c = 1, d = 0$ の場合に限られる。この場合は $p = p_n, q = q_n$ となり、仮定 $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ に反する。したがって c, d は異符号である。一方、定理 2.3.2 の証明中の議論から

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \alpha < \frac{p_n}{q_n} \quad \text{または} \quad \frac{p_n}{q_n} < \alpha < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$$

が成立しているので、 $q_{n-1}\alpha - p_{n-1}$ と $q_n\alpha - p_n$ は異符号である。したがって、 $c(q_n\alpha - p_n)$ と $d(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})$ は同符号である。以上から、

$$|q\alpha - p| = |(cq_n + dq_{n-1})\alpha - (cp_n + dp_{n-1})| = |c(q_n\alpha - p_n) + d(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})|$$

$$= |c(q_n\alpha - p_n)| + |d(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})| \geq |d(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})| \geq |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$$

が成立する。よって $c \neq 0$ の場合でも目的の不等式を得る。

後半の不等式は前半の結果から

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{q} |q\alpha - p| > \frac{1}{q} |q_n\alpha - p_n| \geq \frac{1}{q_n} |q_n\alpha - p_n| = \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|$$

が得られることにより示される。 \square

これを用いて、「良い」近似はすべて無限連分数由来の連分数であることを示す。

定理 2.3.10. 無理数 α に対して

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$$

を満たす既約分数 $\frac{p}{q}$ は、 α の連分数展開を途中で打ち切った形の有限正則連分数から得られる。

証明. α の任意の近似分数 $\frac{p_k}{q_k}$ に対して $\frac{p}{q} \neq \frac{p_k}{q_k}$ であると仮定する。 α が無理数であれば、系 2.2.7 よりある N が存在して $q < q_N$ となる。そこで、 $q_n > q$ を満たす n の中で最小のものを取ってくる。このとき、 $q_{n-1} \leq q < q_n$ である。ここで命題 2.3.9 と仮定から

$$|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| \leq |q\alpha - p| < \frac{1}{2q}$$

を得る。これを用いることで

$$\frac{1}{qq_{n-1}} \leq \frac{|qp_{n-1} - pq_{n-1}|}{qq_{n-1}} = \left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p}{q} \right| \leq \left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2qq_{n-1}} + \frac{1}{2q^2}$$

を得るが、ここから $q < q_{n-1}$ となるので矛盾する。したがってある k が存在して $\frac{p}{q} = \frac{p_k}{q_k}$ がしたがう。 \square

注 2.3.11. 命題 2.3.8、2.3.9、定理 2.3.10 は α が有理数でも n を有限正則連分数展開の長さ（連分数の項の数） $N + 1$ に対して $0 \leq n \leq N - 1$ に制限することで同じ議論が可能である。ただし、定理 2.3.10 の $q < q_N$ なる N を取る部分は、 $\alpha = \frac{p_N}{q_N}$ に対して

$$\frac{1}{q_N} \leq \frac{|qp_N - pq_N|}{q_N} = |q\alpha - p| < \frac{1}{2q}$$

の不等式から $q < q_N$ を得るという議論に置き換えよ。

2.4 無理数のユニモジュラー群軌道

この節では行列がなす群を使って無理数を軌道分解することを考える。詳細は次の章で述べることになるが、この分解において同じ軌道に含まれる無理数はそのラグランジュ定数がすべて等しくなる。したがって、ラグランジュ定数としてとりうる値を考えるとときにこの軌道分解が余計な手間を省いてくれる。まずは無理数を軌道分解するための群であるユニモジュラー群を導入する。

定義 2.4.1. 集合

$$GL(2, \mathbb{Z}) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, |ad - bc| = 1 \right\}$$

を考えると、これは行列積について群となる。これを**ユニモジュラー群**と呼ぶ。

次に $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ と $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対して $A\alpha$ を α の A を用いた 1 次分数変換で与える。すなわち、

$$A\alpha := \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$$

とする。このとき次が成り立つ。

命題 2.4.2. $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ と $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対して $A\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ である。さらに、 $GL(2, \mathbb{Z})$ の $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ への 1 次分数変換は左作用 $GL(2, \mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ を与える。

証明. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ として $A\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ を示す。 $A\alpha$ が有理数であると仮定する。このとき、

$$\alpha = A^{-1}(A\alpha) = \frac{d(A\alpha) - b}{-c(A\alpha) + a}$$

が有理数であることになるが、これは矛盾。したがって、 $A\alpha$ は無理数である。また、 $E_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ に対して $E_2\alpha = \frac{\alpha}{1} = \alpha$ である。さらに、 $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ とすると、

$$A(B\alpha) = A \frac{e\alpha + f}{g\alpha + h} = \frac{a \frac{e\alpha + f}{g\alpha + h} + b}{c \frac{e\alpha + f}{g\alpha + h} + d} = \frac{(ae + bg)\alpha + (af + bh)}{(ce + dg)\alpha + (cf + dh)}$$

であり、一方で

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

であるから

$$(AB)\alpha = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \alpha = \frac{(ae + bg)\alpha + (af + bh)}{(ce + dg)\alpha + (cf + dh)}$$

が成り立ち、以上から $A(B\alpha) = (AB)\alpha$ となる。よって示された。 \square

注 2.4.3. 作用の定義から $A\alpha = (-A)\alpha$ であることに注意せよ。

これを用いて、無理数のユニモジュラー同値を導入する。

定義 2.4.4. 無理数 α, β に対して、ある $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ が存在して $\beta = A\alpha$ となるとき、 α と β は **ユニモジュラー同値** (以下、単に**同値**) といい、 $\alpha \sim \beta$ で表す。また、この同値関係による同値類

$$O_\alpha = \{\beta \mid \beta \sim \alpha\}$$

を α の **ユニモジュラー軌道** (以下、単に**軌道**) という。

無理数へのユニモジュラー群の作用と連分数の関係は、次の命題のように連分数行列を用いる形で端的に表される。

命題 2.4.5. $a_0, a_1, \dots, a_k, \alpha \in \mathbb{R}$ に対して、両辺が定義される限り

$$[a_0; a_1, \dots, a_k, \alpha] = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha$$

が成り立つ。

証明. 命題 2.2.3、定理 2.2.4 から

$$[a_0; a_1, \dots, a_k, \alpha] = \frac{\alpha p_k + p_{k-1}}{\alpha q_k + q_{k-1}} = \begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha$$

となり示された。□

次の定理は、2つの無理数が同値であることの無限連分数展開を使った特徴づけを与える。

定理 2.4.6 (セレの定理). 無理数 $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$ と $\beta = [b_0; b_1, \dots]$ に対して、 $\alpha \sim \beta$ であることと、ある $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して

$$[a_n; a_{n+1}, \dots] = [b_m; b_{m+1}, \dots]$$

が成立することは同値である。とくに、正則連分数展開の一意性から任意の $h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $a_{n+h} = b_{m+h}$ である。

この定理を証明するために次の補題を示す。

補題 2.4.7. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ に対して、 $c > d > 0$ を仮定する。このとき、 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $c_0 \in \mathbb{Z}, c_1, \dots, c_l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して

$$A = \begin{bmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} c_l & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を満たす。

証明. 有理数 $\frac{a}{c}$ に対して、値が $\frac{a}{c}$ である有限連分数展開 $[a_0; a_1, \dots, a_k]$ をとる。 $[a_0; a_1, \dots, a_k]$ の i 番目の近似分数を $\frac{p_i}{q_i}$ とすると、

$$\begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。一方で、必要ならば最後の部分商を調整して $a_k \geq 2$ となる表示を選んでおく。このとき、 $[a_0; a_1, \dots, a_k]$ を $[a_0; a_1, \dots, a_k - 1, 1]$ だと考えてこの連分数に関する i 番目の近似分数を $\frac{p'_i}{q'_i}$ だとすると

$$\begin{bmatrix} p'_{k+1} & p'_k \\ q'_{k+1} & q'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_k - 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である (有限正則連分数の定義から $a_k - 1 \geq 1$ であることに注意せよ)。 $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ であり、 $\det \begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix} = (-1)^{k+1}, \det \begin{bmatrix} p'_{k+1} & p'_k \\ q'_{k+1} & q'_k \end{bmatrix} = (-1)^{k+2}$ となるので

$$\det A = \det \begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \det A = \det \begin{bmatrix} p'_{k+1} & p'_k \\ q'_{k+1} & q'_k \end{bmatrix}$$

のどちらかが必ず成り立ち、そのときもう片方は成り立たない。前者の等式が成り立つときは $A = \begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix}$ 、後者の等式が成り立つ場合は $A = \begin{bmatrix} p'_{k+1} & p'_k \\ q'_{k+1} & q'_k \end{bmatrix}$ であることを示す。まず前者を仮定する。 $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ なので a と c は互いに素であり、さらに $c > 0$ の仮定から $\frac{a}{c}$ は既約分数である。一方 $\frac{p_i}{q_i}$ も系 2.2.6 から既約分数となるので $a = p_k$ かつ $c = q_k$ であることがわかる。このとき、 $\begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix}$ の成分を書き下すと

$$p_k d - b q_k = p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1}$$

これを整理することで

$$p_k(d - q_{k-1}) = q_k(b - p_{k-1})$$

となる。ここで p_k と q_k は互いに素なので $q_k \mid d - q_{k-1}$ となる。このとき $d - q_{k-1} \geq 0$ であれば、 $d < c$ の仮定より

$$d - q_{k-1} < c - q_{k-1} = q_k - q_{k-1} < q_k$$

である (系 2.2.7 より $q_{k-1} > 0$ であることに注意せよ)。 $d - q_{k-1} < 0$ であれば、

$$q_{k-1} - d < q_{k-1} < q_k$$

なので、いずれにせよ $|d - q_{k-1}| < q_k$ である。すなわち $|d - q_{k-1}|$ は q_k より小さく、かつ q_k を約数にもつから $|d - q_{k-1}| = 0$ となる。したがって $q_{k-1} = d$ である。 $p_{k-1} = b$ は他の 3 つの成分と行列式の一致から直ちに従う。したがって、

$$A = \begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であることがしつがう。 $\det A = \det \begin{bmatrix} p'_{k+1} & p'_k \\ q'_{k+1} & q'_k \end{bmatrix}$ の場合も全く同様の議論から

$$A = \begin{bmatrix} p'_{k+1} & p'_k \\ q'_{k+1} & q'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_k - 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

がしつがう。以上から補題が示された。 □

定理 2.4.6 の証明. 無理数 $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$ と $\beta = [b_0; b_1, \dots]$ に対してある $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して

$$[a_n; a_{n+1}, \dots] = [b_m; b_{m+1}, \dots]$$

が成立することを仮定する。このとき $\alpha \sim \beta$ となることを示す。まず $\alpha_n := [a_n; a_{n+1}, \dots], \beta_m := [b_m; b_{m+1}, \dots]$ とする。すると

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, \alpha_n], \quad \beta = [b_0; b_1, \dots, b_{m-1}, \beta_m]$$

であるから (ただし $n = 0$ の場合は $\alpha = \alpha_0$ と読む)、命題 2.4.5 から

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha_n, \quad \beta = \begin{bmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} b_{m-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \beta_m$$

となる。仮定から $\alpha_n = \beta_m$ が成り立つので、後者の式の β_m に前者の式を変形して代入することで

$$\beta = \begin{bmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} b_{m-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdots \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \alpha.$$

ここで各 $\begin{bmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_j & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ は $GL(2, \mathbb{Z})$ の元だから、

$$\begin{bmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} b_{m-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdots \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \in GL(2, \mathbb{Z}).$$

したがって、 α と β は同値である。

次に逆を示す。 $\alpha \sim \beta$ を仮定する。このとき、ある $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ が存在して $\beta = A\alpha$ である。ここで、作用の定義から $\beta = A\alpha$ ならば $\beta = (-A)\alpha$ でもあるので、必要ならば A を $-A$ に取り替えることで $c\alpha + d > 0$ を仮定してよい。このとき、任意の $n \geq 1$ に対して

$$\beta = A\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{bmatrix} \alpha_n$$

が成立する。ただし

$$\begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とした。ここで、

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{bmatrix}$$

が適切な n をとることで $c' > d' > 0$ を満たすことができることを示す。成分計算から

$$c' = cp_{n-1} + dq_{n-1} = q_{n-1} \left(\frac{cp_{n-1}}{q_{n-1}} + d \right) \quad (2.4.1)$$

$$d' = cp_{n-2} + dq_{n-2} = q_{n-2} \left(\frac{cp_{n-2}}{q_{n-2}} + d \right) \quad (2.4.2)$$

となる。ここで $c = 0$ の場合は $d > 0$ である。このとき上式から $c' = dq_{n-1}$ 、 $d' = dq_{n-2}$ であり、十分大きい n について $q_{n-1} > q_{n-2} > 0$ となるので $c' > d' > 0$ が従う。したがって以下では $c \neq 0$ としてよい。いま $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cp_{n-1}}{q_{n-1}} + d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cp_{n-2}}{q_{n-2}} + d = c\alpha + d > 0$ なので、十分大きな n を取りなおすことで $\frac{cp_{n-1}}{q_{n-1}} + d > 0$ 、 $\frac{cp_{n-2}}{q_{n-2}} + d > 0$ としてよい。さらに $q_{n-1}, q_{n-2} > 0$ であるから (2.4.1), (2.4.2) から $c', d' > 0$ となる。また、

$$\begin{aligned} c' - d' &= q_{n-1} \left(\frac{cp_{n-1}}{q_{n-1}} + d \right) - q_{n-2} \left(\frac{cp_{n-2}}{q_{n-2}} + d \right) > q_{n-1} \left(\frac{cp_{n-1}}{q_{n-1}} + d \right) - q_{n-1} \left(\frac{cp_{n-2}}{q_{n-2}} + d \right) \\ &= \frac{c}{q_{n-2}} (p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2}) = \frac{(-1)^n c}{q_{n-2}} \end{aligned}$$

である。十分大きな n はどちらの偶奇にも取れるので、さらに $(-1)^n c > 0$ となるように n を取り直せば $c' - d' > 0$ となる。以上をすべて満たすような n をとることで、補題 2.4.7 から

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} c_\ell & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を満たす $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $c_0 \in \mathbb{Z}, c_1, \dots, c_\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在する。したがって

$$\beta = \begin{bmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} c_\ell & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha_n = [c_0; c_1, \dots, c_\ell, \alpha_n] = [c_0; c_1, \dots, c_\ell, a_n, a_{n+1}, \dots]$$

となり、ここで、 $n \geq 1$ であるから $a_n \geq 1$ であることに注意するとこれが β の無限連分数展開となる。以上から、 $m = \ell + 1$ と取ることで $[a_n; a_{n+1}, \dots] = [b_m; b_{m+1}, \dots]$ を得る。以上より示された。□

2.5 循環連分数と2次無理数

この節では、無理数の正則連分数展開の部分商が循環するようなケースを考え、これを無理数の持つ性質で特徴付けることを考える。まずは循環連分数を定義するところから始めよう。

定義 2.5.1. 無限正則連分数であって、部分商が

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, b_0, b_1, \dots, b_\ell, b_0, b_1, \dots, b_\ell, b_0, b_1, \dots]$$

のように途中から循環する連分数のことを**循環連分数**といい、

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \overline{b_0, b_1, \dots, b_\ell}]$$

で表す。循環する数列 (b_0, \dots, b_ℓ) のことを**循環節**という。とくに最初から循環節の繰り返しになっているものを**純循環連分数**という。

次に、2次無理数と呼ばれる無理数を定義する。

定義 2.5.2. 無理数 α が整数係数2次方程式の解である、すなわち $\gcd(a, b, c) = 1$ であるような $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $b, c \in \mathbb{Z}$ が存在して、

$$\alpha = \frac{-b + \varepsilon\sqrt{D}}{2a}$$

(ただし $D = b^2 - 4ac$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ であり、 $D > 0$ かつ D は平方数でないものとする) と表せるとき、 α は**2次無理数**であるという。このとき、 D を α に対する**判別式**という。上記の2次無理数 α に対して、 α の2次共役を α' とする；すなわち、

$$\alpha' = \frac{-b - \varepsilon\sqrt{D}}{2a}$$

であるとする。 $\alpha > 1$ かつ $-1 < \alpha' < 0$ となるとき、 α を**簡約2次無理数**という。

α が簡約2次無理数であるときは $\alpha > \alpha'$ なので常に $\varepsilon = 1$ である。また、判別式 D は α に対して一意に定まるような値としておきたいので、計算に使用する α を根とする2次式は $a \geq 1$ かつ $\gcd(a, b, c) = 1$ を課すことによって複数の選択肢が出ないようにしていることにも注意が必要である。

2次無理数全体の集合を I_2 、簡約2次無理数全体の集合を R_2 とする。また、 $D = d$ であるような2次無理数全体の集合を $I_2(d)$ 、同様に $D = d$ であるような簡約2次無理数全体の集合を $R_2(d)$ とする。

さて、本節の主定理は以下の定理である。

定理 2.5.3 (ラグランジュの定理). 次が成り立つ。

- (1) 無理数 α の無限連分数展開が循環連分数であることと α が2次無理数であることは同値。
- (2) さらに、無理数 α の無限連分数展開が純循環連分数であることと α が簡約2次無理数であることは同値。

この定理を証明するために準備をしていこう。

定理 2.5.4. ユニモジュラー群の $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ への作用は I_2 への作用と任意の正の平方数でない整数 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対する $I_2(d)$ への作用を定める。

証明. $I_2(d)$ 上でユニモジュラー群が作用することを確認すれば十分である。 $\alpha \in I_2(d)$ とする。 α を根とする 2 次式を $ax^2 + bx + c$ とする。ここで $\gcd(a, b, c) = 1$ と仮定する (これにより、この 2 次式の判別式 $b^2 - 4ac$ は α に対する判別式となる)。 $M = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ に対して、 $\beta = M\alpha$ とする。このとき命題 2.4.2 より $GL(2, \mathbb{Z})$ は $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に作用しているので β は無理数である。 α について $\beta = M\alpha$ を解くことで

$$\alpha = M^{-1}\beta = \frac{v\beta - t}{-u\beta + s}$$

となる。いま α は $ax^2 + bx + c = 0$ を満たしているので、ここに $x = \alpha = \frac{v\beta - t}{-u\beta + s}$ を代入して整理することで

$$(av^2 + cu^2 - buv)\beta^2 + (-2atv + bsv + but - 2csu)\beta + at^2 + cs^2 - bst = 0$$

を得る。したがって β は 2 次式

$$(av^2 + cu^2 - buv)x^2 + (-2atv + bsv + but - 2csu)x + at^2 + cs^2 - bst$$

の根である。以下、 $A = av^2 + cu^2 - buv$, $B = -2atv + bsv + but - 2csu$, $C = at^2 + cs^2 - bst$ とする。この 2 次式の判別式 $B^2 - 4AC$ が β に対する判別式となっていることをいうために $\gcd(A, B, C) = 1$ と $A \neq 0$ であることを確かめる (厳密には $A \neq 0$ ではなく $A > 0$ が必要だが、2 次式を -1 倍しても β が根であることは変わらず、また判別式の値は不変なので、 $A < 0$ ならば 2 次式を -1 倍したものに取り替えれば良い)。まず $A \neq 0$ は β が無理数の根であることから直ちにわかる。 $\gcd(A, B, C) = 1$ を示す。 $e \in \mathbb{Z}$ が $e \mid A, e \mid B, e \mid C$ を満たすとする。このとき、

$$\begin{aligned} s^2A + suB + u^2C &= a(sv - tu)^2 = a, \\ 2stA + (sv + tu)B + 2uvC &= b(sv - tu)^2 = b \\ t^2A + tvB + v^2C &= c(sv - tu)^2 = c \end{aligned}$$

となるので $e \mid a, e \mid b, e \mid c$ を満たす。 $\gcd(a, b, c) = 1$ だから e の最大値は 1 である。したがって $\gcd(A, B, C) = 1$ がわかるので、 $B^2 - 4AC$ は β に対する判別式である。これを計算すると、

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)(sv - tu)^2 = b^2 - 4ac$$

となる。ここで $\alpha \in I_2(d)$ なので $d = b^2 - 4ac$ である。したがって $B^2 - 4AC = d$ となり、 $\beta \in I_2(d)$ であることが示された。□

定理 2.5.5. 正の平方数でない整数 d を固定する。任意の $\alpha = [a_0; a_1, \dots] \in I_2(d)$ に対して、十分大きく n をとることで $\alpha_n := [a_n; a_{n+1}, \dots] \in R_2(d)$ とできる。さらに、この n に対して $m \geq n$ であるとき、 $\alpha_m \in R_2(d)$ である。

証明. $\alpha \in I_2(d)$ の無限連分数展開が $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$ で与えられるとする。ここで $\alpha_k := [a_k; a_{k+1}, \dots]$ であるとすると、 $k \geq 1$ のとき

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, \alpha_k] = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha_k$$

が成り立つ (最後の等式は命題 2.4.5 からしたがう)。ここで $\begin{bmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ から $k \geq 0$ に対して α と α_k は同値であり、定理 2.5.4 から $\alpha_k \in I_2(d)$ となる。さらに α_{k+1} の構成アルゴリズム (2.3.1) により $\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - [\alpha_k]}$ であったので、 $0 < \alpha_k - [\alpha_k] < 1$ から $\alpha_{k+1} > 1$ がわかる。すなわち、 $k \geq 1$ ならば常に $\alpha_k > 1$ である。したがって十分大きいすべての n に対して2次共役 α'_n が $-1 < \alpha'_n < 0$ となることを示せばよい。ここで、 $\alpha = \begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix} \alpha_{k+1}$ を考えると、これを α_{k+1} についての式に変形することで

$$\alpha_{k+1} = \begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix}^{-1} \alpha = \begin{bmatrix} q_{k-1} & -p_{k-1} \\ -q_k & p_k \end{bmatrix} \alpha$$

を得る。ただし、厳密には逆行列には符号因子が現れるが、分数線形作用では行列全体を -1 倍しても同じ変換を定めるので、上の表示を用いている。この等式の両辺の2次共役を取ることで、

$$\alpha'_{k+1} = -\frac{q_{k-1}\alpha' - p_{k-1}}{q_k\alpha' - p_k} = -\frac{q_{k-1}}{q_k} \frac{\alpha' - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}}{\alpha' - \frac{p_k}{q_k}}$$

となる。ここで $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k} = \alpha$ なので

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha' - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}}{\alpha' - \frac{p_k}{q_k}} = 1$$

である。特に極限の定義から、ある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して $n \geq N$ ならば

$$\frac{\alpha' - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{\alpha' - \frac{p_n}{q_n}} > 0$$

である。これと $\frac{q_{n-1}}{q_n} > 0$ をあわせることで、このような n に対して $\alpha'_{n+1} < 0$ であることがわかる。さらに、 α_{n+2} の定義式 $\alpha_{n+2} = \frac{1}{\alpha_{n+1} - a_{n+1}}$ の両辺2次共役をとって

$$\alpha'_{n+2} = -\frac{1}{a_{n+1} - \alpha'_{n+1}}$$

を考えると、 $\alpha'_{n+1} < 0$ かつ $a_{n+1} \geq 1$ なので $-1 < \alpha'_{n+2} < 0$ であることがわかる。以上から $m \geq N + 2$ に対して $\alpha_m \in R_2(d)$ であることが示された。□

定理 2.5.5 から直ちに次の系を得る。

系 2.5.6. 任意の正の平方数でない整数 d と任意の $\alpha \in I_2(d)$ に対してある $\beta \in R_2(d)$ が存在して $\alpha \sim \beta$ が成り立つ。したがって、 $I_2(d)$ の各軌道の代表元として $R_2(d)$ の元がとれる。

補題 2.5.7. $\alpha \in R_2(d)$ とする。 α を根として持つ2次式を $ax^2 + bx + c$ (ただし $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ かつ $\gcd(a, b, c) = 1$) とすると、

$$0 < -b < \sqrt{d}$$

が成立する。とくに、任意の正の平方数でない整数 d に対して $R_2(d)$ は有限集合である。

証明. α の簡約性から

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} > 1, -1 < \alpha' = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} < 0$$

が成り立つ。この分母を払うことで

$$-b + \sqrt{d} > 2a > b + \sqrt{d} > 0$$

を得る。特に $-b + \sqrt{d} > b + \sqrt{d}$ から $0 < -b$ であり、 $b + \sqrt{d} > 0$ から $-b < \sqrt{d}$ である。したがって $0 < -b < \sqrt{d}$ となり、 d が固定であればありえる b は有限個である。さらに $d - b^2 = -4ac$ であり、 $a, c \in \mathbb{Z}$ よりありえる a, c は有限個である。以上からこの条件を満たす α も有限個となる。□

補題 2.5.8. α が簡約な2次無理数であるとき、連分数アルゴリズム (2.3.1) にしたがって $\alpha = [a_0; \alpha_1]$ とすると $[\alpha] = a_0 = [-\frac{1}{\alpha_1}]$ が成立する。

証明. $\alpha = [a_0; \alpha_1] = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$ とすると、共役をとって $\alpha' = a_0 + \frac{1}{\alpha_1'}$ である。これを整理して $-\frac{1}{\alpha_1'} = a_0 + (-\alpha')$ を得る。ここで、 $-1 < \alpha' < 0$ であるから、 $-\frac{1}{\alpha_1'}$ の整数部分は a_0 である。よって示された。□

定理 2.5.3 の証明. まず、(2) の「 α の無限連分数展開が純循環連分数ならば $\alpha \in R_2$ である」を示す。 $\alpha = [a_0; \overline{a_1, \dots, a_{n-1}}]$ とする。このとき、

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, \alpha] = \frac{\alpha p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha q_{n-1} + q_{n-2}}$$

が成り立つ。これを整理することで

$$q_{n-1}\alpha^2 + (q_{n-2} - p_{n-1})\alpha - p_{n-2} = 0$$

を得る。したがって α は2次方程式の解であり、 $\alpha \notin \mathbb{Q}$ なので $\alpha \in I_2$ がいえる。また純循環性より、

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, \alpha] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \alpha] = \dots$$

となり、任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\alpha = \alpha_{kn}$ である。したがって、定理 2.5.5 より $\alpha \in R_2$ である。よって示された。

次に (1) の「 α の無限連分数展開が循環連分数ならば $\alpha \in I_2$ である」を示す。

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \overline{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}}]$$

とする。 $\alpha_n = [\overline{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}}]$ とすると、直前の議論より $\alpha_n \in R_2 \subset I_2$ である。したがって、

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \alpha_n] = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{bmatrix} \alpha_n$$

であり、 $\begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ であるから定理 2.5.4 より $\alpha \in I_2$ がわかる。

次に (1) の「 $\alpha \in I_2$ ならば α の無限連分数展開が循環連分数である」を示す。 $\alpha \in I_2$ とし、 α に対する判別式を d とする。このとき d は正の平方数でない整数であり、 $\alpha \in I_2(d)$ である。定理 2.5.5 から十分大きい n について、 $m \geq n$ ならば常に $\alpha_m \in R_2(d)$ となる。ここで補題 2.5.7 より $R_2(d)$ の元は有限個なので、ある $n \leq \ell < \ell'$ が存在して $\alpha_\ell = \alpha_{\ell'}$ である。このとき、

$$\alpha_\ell = [a_\ell; a_{\ell+1}, \dots, a_{\ell'-1}, \alpha_{\ell'}] = [a_\ell; a_{\ell+1}, \dots, a_{\ell'-1}, \alpha_\ell]$$

となる。したがって

$$\alpha_\ell = [\overline{a_\ell; a_{\ell+1}, \dots, a_{\ell'-1}}]$$

となり、 α の無限連分数展開は循環連分数である。

最後に (2) の「 $\alpha \in R_2$ ならば α の無限連分数展開が純循環連分数である」を示す。 $\alpha \in R_2$ とし、 α に対する判別式を d とする。このとき $\alpha \in R_2(d)$ である。ここで、 $a_0 = [\alpha]$ とおけば、 $\alpha > 1$ かつ $-1 < \alpha' < 0$ から $\alpha_1 = 1/(\alpha - a_0) > 1$ かつ $\alpha'_1 = 1/(\alpha' - a_0) \in (-1, 0)$ が従い、判別式は $GL(2, \mathbb{Z})$ 作用で保存される。したがって、任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\alpha_n \in R_2(d)$ である。補題 2.5.7 より $R_2(d)$ は有限集合なので、ある $0 \leq \ell < \ell'$ が存在して $\alpha_\ell = \alpha_{\ell'}$ となる。 $\ell = 0$ の場合は直ちに $\alpha_0 = \alpha_{\ell'}$ であり、直前の主張と同じ議論から純循環性が従う。以下では $\ell \geq 1$ とする。このとき、

$$\alpha_{\ell-1} = [a_{\ell-1}; \alpha_\ell], \quad \alpha_{\ell'-1} = [a_{\ell'-1}; \alpha_{\ell'}]$$

であり、補題 2.5.8 から $a_{\ell-1} = [-\frac{1}{\alpha'_\ell}] = [-\frac{1}{\alpha'_{\ell'}}] = a_{\ell'-1}$ である。以上より $\alpha_{\ell-1} = \alpha_{\ell'-1}$ となる。この操作を繰り返すことにより $\alpha_0 = \alpha_{\ell'-\ell}$ が成り立つので、あとは直前の主張と同じ議論から

$$\alpha = [\overline{a_0; a_1, \dots, a_{\ell'-\ell-1}}]$$

となって示された。 □

注 2.5.9. 定理 2.5.3 の「 $\alpha \in R_2$ ならば α の無限連分数展開が純循環連分数である」の証明において、いきなり「ある ℓ が存在して $\alpha_0 = \alpha_\ell$ 」とすることはできない。なぜなら、 α_0 が他の α_ℓ と重複することは $R_2(d)$ の有限性だけからは導出できないからである。実際、補題 2.5.8 を適用する前の段階では「 α_0 がその他のすべての α_i とは異なっていて、かつ α_i たちのバリエーションが有限である」という可能性を排除できない。

最後に、周期節が反転した連分数が与える 2 次無理数の、元の 2 次無理数との関係性を記述しておく。この事実は次の章以降で必要となる。

命題 2.5.10. $\alpha = [\overline{a_0; a_1, \dots, a_{n-1}}] \in R_2$ であるとき、

$$-\frac{1}{\alpha'} = [\overline{a_{n-1}; a_{n-2}, \dots, a_0}]$$

が成立する。ただし α' は α の 2 次共役である。

証明. $\alpha = [\overline{a_0; a_1, \dots, a_{n-1}}]$ から

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, \alpha] = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{bmatrix} \alpha = \frac{p_{n-1}\alpha + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha + q_{n-2}}$$

となる。ここから α は

$$q_{n-1}x^2 + (q_{n-2} - p_{n-1})x - p_{n-2} = 0 \tag{2.5.1}$$

の解であることがわかる。一方、

$$\begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

の両辺について転置を取ることで

$$\begin{bmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

が得られるので、 $\beta := [\overline{a_{n-1}; a_{n-2}, \dots, a_0}]$ とおくと

$$\beta = [a_{n-1}; a_{n-2}, \dots, a_0, \beta] = \begin{bmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{bmatrix} \beta = \frac{p_{n-1}\beta + q_{n-1}}{p_{n-2}\beta + q_{n-2}}$$

が成り立つ。これを整理することで

$$p_{n-2}\beta^2 + (q_{n-2} - p_{n-1})\beta - q_{n-1} = 0$$

を得る。さらにこれを両辺 $-\beta^2$ で割ると

$$-p_{n-2} + (q_{n-2} - p_{n-1})\left(-\frac{1}{\beta}\right) + q_{n-1}\left(-\frac{1}{\beta}\right)^2 = 0$$

となるが、これは $-\frac{1}{\beta}$ が (2.5.1) の解であることを意味する。 $a_{n-1} \geq 1$ なので補題 2.3.5 から $\beta > [\beta] = a_{n-1} \geq 1$ より、 $-1 < -\frac{1}{\beta} < 0$ である。以上から $\alpha' = -\frac{1}{\beta}$ となり、これを整理して $\beta = -\frac{1}{\alpha'}$ を得る。以上から示された。 \square

第3章

ラグランジュスペクトラム

第2章で連分数と2次無理数の基礎を整えたので、本章ではそれを用いてラグランジュスペクトラムの基本的な性質を見ていく。ラグランジュスペクトラムは、無理数が有理数でどれほどよく近似されるかを表すラグランジュ定数全体の集合であり、ディオファントス近似理論における最も基本的な対象の一つである。定義だけを見ると近似の良さを分母の累乗指数で測る無理数度の乗法類似であるという程度の印象しか持たないかもしれないが、連分数展開を通して眺めることで、その値は無限列や周期性と深く結びついていることがわかる。

本章では、まずラグランジュ定数の定義とその計算しやすい形を与え、いくつかの基本例を計算する。ついでさらに両側無限数列による表示を導入することで、次章で扱うマルコフスペクトラムとの比較がしやすい形に整える。さらに2次無理数に対しては、前章で準備した $GL(2, \mathbb{Z})$ の作用と循環連分数の理論を用いることで、ラグランジュ定数を具体的に計算できることを示す。

マルコフの定理の解説を念頭に置いた標準的なテキスト [Aig13, Bom07, Reu19] では最初からラグランジュ定数に3以下という仮定を課して議論をしているが、本稿のこの章ではそのような仮定をせず一般的な状況で証明を進める。

この章の議論は [Aig13] を参考にしている。

3.1 定義と最初の具体例

この節ではラグランジュスペクトラムと呼ばれる集合を導入し、最も単純な具体例について確認する。

定義 3.1.1. 実数 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対して、 $\mathcal{L}(\alpha)$ を次の条件を満たす正実数 L の上限として定める：

- 不等式 $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Lq^2}$ を満たす既約分数 $\frac{p}{q}$ ($q > 0$) が無限個存在する。

上限が存在しない場合、 $\mathcal{L}(\alpha) = \infty$ と定める。これを α のラグランジュ定数と呼ぶ。実無理数のラグランジュ定数全体の集合

$$\mathcal{L} := \{\mathcal{L}(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\},$$

をラグランジュスペクトラムと呼ぶ。

定義には含まれていないが、まずは α が有理数の場合と同じ定義を適用してどのような値になるのか見てみることにする。

命題 3.1.2. α を任意の有理数として、 L を任意の正の実数とする。このとき $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{Lq^2}$ を満たす既約分数 $\frac{p}{q}$ ($q > 0$) は有限個しかない。

証明. $\frac{p}{q} = \alpha$ となる既約分数は高々 1 つなので、以下では $\frac{p}{q} \neq \alpha$ とする。まず $\alpha = \frac{a}{b}$ (ただし $\frac{a}{b}$ は既約分数) とおく。このとき、

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \frac{|aq - bp|}{bq} \geq \frac{1}{bq}$$

が成り立つので、 $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{Lq^2}$ が成り立つならば $\frac{1}{Lq^2} > \frac{1}{bq}$ となる。したがって、このとき $q < \frac{b}{L}$ となるが、 q は正整数なのでこれを満たす q は有限個となる。また、 $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{Lq^2}$ を満たすとき、この不等式を p について解くことで

$$\frac{aq}{b} - \frac{1}{Lq} < p < \frac{aq}{b} + \frac{1}{Lq}$$

を得る。 p は整数なので、 q を 1 つ固定した時にこの条件を満たす p は有限個である。以上から、 L を任意の正の実数としたとき $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{Lq^2}$ を満たす既約分数 $\frac{p}{q}$ が有限個しかないことが示された。□

上記の命題より α が有理数の場合は定義 3.1.1 の条件を満たす L 全体の集合は空集合であり、これを考えてもあまり意味がないことがわかる。これ以降は α が無理数の場合を考える。まず、ラグランジュ定数の連分数を用いた特徴づけを与える。

定理 3.1.3. 無理数 α に対してその無限連分数展開を $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$ とする。このとき $\alpha_n := [a_n; a_{n+1}, \dots], \beta_n := [a_n; a_{n-1}, \dots, a_1]$ とすると、

$$\mathcal{L}(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha_{n+1} + \frac{1}{\beta_n} \right) \tag{3.1.1}$$

が成り立つ (これ以降、 $\lambda_n(\alpha) := \alpha_{n+1} + \frac{1}{\beta_n}$ と表すことにする)。

補題 3.1.4. 無理数 α が無限連分数展開 $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$ を持つとする。このとき、任意の $k \geq 1$ に対して

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \dots, a_1] (= \beta_k)$$

が成り立つ。

証明. 帰納法で証明する。 $k = 1$ ならば $\frac{q_1}{q_0} = a_1$ である。 $k - 1$ での成立を仮定する。このとき、

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}{q_{k-1}} = a_k + [0; a_{k-1}, \dots, a_1] = [a_k; a_{k-1}, \dots, a_1]$$

となり、 k での成立が示された。□

定理 3.1.3 の証明. まず近似分数について

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{\alpha_{n+1} q_n^2 + q_{n-1} q_n} = \frac{1}{\lambda_n(\alpha) q_n^2}$$

が成り立つ。ただし最後の等式では補題 3.1.4 を用いた。

まず $\mathcal{L}(\alpha) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha)$ を示す。 L を

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Lq^2}$$

を満たす既約分数 $\frac{p}{q}$ が無限個存在するような正の実数とする。 $L > 2$ の場合は、これらの既約分数は定理 2.3.10 よりすべて近似分数である。したがって無限個の n に対して

$$\frac{1}{\lambda_n(\alpha)q_n^2} < \frac{1}{Lq_n^2}$$

となり、 $\lambda_n(\alpha) > L$ が無限回成り立つ。よって $L \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha)$ である。

一方 $L \leq 2$ の場合も、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha) \geq 2$ であることから同じ結論が従う。実際、部分商 $a_j \geq 2$ が無限回現れるならば $\lambda_{j-1}(\alpha) > 2$ が無限回成り立つ。そうでなければ十分大きい j では常に $a_j = 1$ であり、この場合は $\limsup_{j \rightarrow \infty} \lambda_j(\alpha) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j(\alpha) = \sqrt{5} > 2$ である。したがって任意の場合に $L \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha)$ であり、上限をとれば $\mathcal{L}(\alpha) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha)$ を得る。

逆に任意の $\varepsilon > 0$ に対して、上極限の定義から

$$\lambda_n(\alpha) > \limsup_{m \rightarrow \infty} \lambda_m(\alpha) - \varepsilon$$

を満たす n が無限個存在する。これらの n について

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{(\limsup_{m \rightarrow \infty} \lambda_m(\alpha) - \varepsilon)q_n^2}$$

が成り立つので、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha) - \varepsilon \leq \mathcal{L}(\alpha)$ である。 $\varepsilon > 0$ は任意であるから、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha) \leq \mathcal{L}(\alpha)$ も従う。以上より主張が示された。 \square

例 3.1.5. 定理 3.1.3 による特徴付けを使って具体例を計算してみることにしよう。

(1) $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とする。このとき、 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ であるから、 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [\bar{1}]$ であり、したがって

$$\mathcal{L}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \limsup_{n \rightarrow \infty}([\bar{1}] + [0; 1, \dots, 1]) = [\bar{1}] + \lim_{n \rightarrow \infty} [0; 1, \dots, 1] = [\bar{1}] + [0; \bar{1}] = \sqrt{5}$$

が成り立つ。

(2) $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ とする。このとき、 $1 + \sqrt{2} = [2; 1 + \sqrt{2}]$ であるから、 $1 + \sqrt{2} = [\bar{2}]$ であり、したがって

$$\mathcal{L}(1 + \sqrt{2}) = \limsup_{n \rightarrow \infty}([\bar{2}] + [0; 2, \dots, 2]) = [\bar{2}] + \lim_{n \rightarrow \infty} [0; 2, \dots, 2] = [\bar{2}] + [0; \bar{2}] = 2\sqrt{2}$$

が成り立つ。

この節の最後に、ラグランジュスペクトラムを無限列と上極限を用いて特徴づけることができることをみよう。任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ であるような成分からなる両側無限列 $\mathbf{a} = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$ を考える。これに対して、

$$\ell_n(\mathbf{a}) := [a_n; a_{n+1}, \dots] + [0; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots]$$

を定める。このとき、結果的に次が成立する。

系 3.1.6 (ペロンの恒等式). ラグランジュスペクトラムは次の形で特徴付けられる。

$$\mathcal{L} = \left\{ \limsup_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{\mathbb{Z}} \right\}.$$

まず次の補題を示す。

補題 3.1.7. α, β を無理数として、その連分数展開をそれぞれ $\alpha = [a_0; a_1, \dots], \beta = [b_0; b_1, \dots]$ とする。ある $n \geq 2$ に対して $a_i = b_i$ ($0 \leq i \leq n$) かつ $a_{n+1} \neq b_{n+1}$ が成り立つとき、 $|\alpha - \beta| \leq \frac{1}{n(n-1)}$ が成り立つ。

証明. 任意の $0 \leq k \leq n$ に対して、 $\frac{p_k}{q_k} := [a_0; a_1, \dots, a_k]$ とする。このとき、 α と β に対して、系 2.2.9 を無限連分数へ拡張した極限の議論から、「 $\alpha < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ かつ $\beta < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 」または「 $\alpha > \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ かつ $\beta > \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 」のどちらかが成り立つ。したがって

$$|\alpha - \beta| \leq \max \left\{ \left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|, \left| \beta - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| \right\} \leq \frac{1}{q_{n-1}q_n} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

が成立する。ただし2つ目の不等式は命題 2.3.8, 3つ目の不等式は系 2.2.7 からしたがう。□

系 3.1.6 の証明. 右辺の集合を

$$\mathcal{R} := \left\{ \limsup_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(a) \mid a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{\mathbb{Z}} \right\}$$

とおく。 $\mathcal{R} = \mathcal{L}$ を示せばよい。

まず $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ を示す。任意に $\mathbf{a} = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{\mathbb{Z}}$ をとり、 $\alpha := [0; a_1, a_2, \dots]$ とおく。さらに

$$u_n := [0; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1], \quad v_n := [0; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0, a_{-1}, \dots]$$

とおくと定理 3.1.3 より

$$\mathcal{L}(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} ([a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] + u_n)$$

であり、一方

$$\ell_n(\mathbf{a}) = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] + v_n$$

である。

ここで v_n は u_n と同じ初期部分商を持つ無限連分数である。有限連分数 u_n を同じ初期部分商を持つ無限連分数の近似とみなして、補題 3.1.7 を用いれば、

$$|u_n - v_n| \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad (n \geq 2)$$

が成り立つ。したがって

$$|\ell_n(\mathbf{a}) - ([a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] + u_n)| \leq \frac{1}{n(n-1)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\mathbf{a}) = \mathcal{L}(\alpha) \in \mathcal{L}$$

を得る。よって $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ である。

次に $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$ を示す。任意に $r \in \mathcal{L}$ をとる。するとある無理数 $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ が存在して $r = \mathcal{L}(\alpha)$ となる。ここで $\tilde{\alpha} := [0; a_1, a_2, \dots]$ とおくと、(3.1.1) の表示式は a_0 に依存しないので $\mathcal{L}(\tilde{\alpha}) = \mathcal{L}(\alpha) = r$ が成り立つ。

そこで両側無限列 $\mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ を

$$b_n = \begin{cases} a_n & (n \geq 1), \\ 1 & (n \leq 0) \end{cases}$$

で定める。さらに

$$u_n := [0; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1], \quad w_n := [0; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, 1, 1, \dots]$$

とおくと、定理 3.1.3 より

$$\mathcal{L}(\tilde{\alpha}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} ([a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] + u_n)$$

であり、一方

$$\ell_n(\mathbf{b}) = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] + w_n$$

である。ここでも有限連分数 u_n を同じ初期部分商を持つ無限連分数の近似とみなして補題 3.1.7 を用いれば、

$$|u_n - w_n| \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad (n \geq 2)$$

が成り立つ。したがって

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\mathbf{b}) = \mathcal{L}(\tilde{\alpha}) = r$$

となる。よって $r \in \mathcal{R}$ であり、 $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$ を得る。

以上より $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ 、すなわち

$$\mathcal{L} = \left\{ \limsup_{n \rightarrow +\infty} \ell_n(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{\mathbb{Z}} \right\}$$

が成り立つ。□

系 3.1.6 は Perron が与えた \mathcal{L} の特徴づけということで紹介したが、筆者はこの表示はあまり本質的ではないと感じている。系 3.1.6 の証明中で無理数 α に対応するために構成した無限数列 \mathbf{b} について、 α の連分数展開から出てこない左側の部分をすべて 1 で補完しているが、ここはどんな数列を持ってきてもその後の議論は問題なく進むので、実質的に定理 3.1.3 から情報が増えていないのである。どちらかという、重要なのは (3.1.1) の表示と、次の節で与える上限を使ったラグランジュ定数の両側無限数列表示である。

3.2 ラグランジュ定数の両側無限数列と上限による表示

この節では、前節で定義したラグランジュスペクトラムを両側無限数列と上限（上極限ではないことに注意）を用いて表示することを考える。これは、のちに与えるマルコフ定数との比較に役立つ。まず、次の命題を示しておく。

命題 3.2.1. α を無理数とし、無限連分数展開を $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$ とする。

- (1) $(a_n)_{n=0}^\infty$ が有界であるとき、 $\mathcal{L}(\alpha) < \infty$ となる。
 (2) $(a_n)_{n=0}^\infty$ が非有界であるとき、 $\mathcal{L}(\alpha) = \infty$ となる。

証明. 各 $n \geq 1$ に対して

$$x_n := \alpha_{n+1} + \frac{1}{\beta_n}$$

とおく。補題 2.2.14, 2.3.5 より、任意の $n \geq 1$ について

$$a_{n+1} < x_n < a_{n+1} + 2$$

が成り立つ。したがって

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} + 2$$

である。

ここで、 $(a_n)_{n=0}^\infty$ の有界性は $(a_{n+1})_{n=1}^\infty$ の有界性と同値である。ゆえに $(a_n)_{n=0}^\infty$ が有界ならば $(x_n)_{n=1}^\infty$ も有界であり、逆に $(a_n)_{n=0}^\infty$ が非有界ならば $(x_n)_{n=1}^\infty$ も非有界である。すなわち、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

は、 $(a_n)_{n=0}^\infty$ が有界なとき有限であり、非有界なとき ∞ である。

定理 3.1.3 より

$$\mathcal{L}(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha_{n+1} + \frac{1}{\beta_n} \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

であるから、主張 (1), (2) が従う。 \square

以上により $(a_n)_{n=0}^\infty$ が有界な場合にのみ $\mathcal{L}(\alpha)$ が意味のある数になるので、 ∞ でないラグランジュスペクトラムの元を考える上では $(a_n)_{n=0}^\infty$ が有界であることを仮定して良いことになる。

命題 3.2.2. 無理数 α に対して無限連分数展開を $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$ として、 $(a_n)_{n=0}^\infty$ が有界であると仮定する。 $\alpha_n = [a_n; a_{n+1}, \dots]$, $\beta_n = [a_n; a_{n-1}, \dots, a_1]$, $\lambda_n(\alpha) = \alpha_{n+1} + \frac{1}{\beta_n}$ とする。このとき以下が成り立つ。

- (1) $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$ は有界である。
 (2) $(\beta_n)_{n=1}^\infty$ は有界である。
 (3) $(\lambda_n(\alpha))_{n=1}^\infty$ は有界である。

証明. $(a_n)_{n=1}^\infty$ における最大値を a とする。(1) を示す。 α_k (ただし $k \geq 1$) に対して補題 2.3.5 から $a_k < \alpha_k < a_k + 1$ であることから、任意の $n \geq 1$ に対して $1 < \alpha_n < a + 1$ が成立する。よって $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$ は有界。(2) は同様にして、補題 2.2.14 から $a_k \leq \beta_k < a_k + 1$ であることから、任意の $n \geq 1$ に対して $1 \leq \beta_n < a + 1$ が成立する。よって $(\beta_n)_{n=1}^\infty$ は有界。(3) は (1) と (2) から任意の $n \geq 1$ に対して $1 < \alpha_{n+1} + \frac{1}{\beta_n} < a + 2$ となることからしたがう。 \square

さて、 $(\alpha_{n+1} + \frac{1}{\beta_n})_{n=1}^\infty$ は有界なのでボルツァノ=ワイエルシュトラスの定理 (定理 A.1.1) からその部分列 $(\alpha_{n_i+1} + \frac{1}{\beta_{n_i}})_{i=1}^\infty$ で収束するようなものが取れる。その極限を r とする。さらに $(\beta_{n_i})_{i=1}^\infty$ も有界なので、この数列のさらなる部分列 $(\beta_{n_{ij}})_{j=1}^\infty$ であって収束するような列が取れる。この列の収束先を η とする。さらにこの添字に関する $(\alpha_{n+1})_{n=1}^\infty$ の部分列 $(\alpha_{n_{ij}+1})_{j=1}^\infty$ をとると、この数列

は $r - \frac{1}{\eta}$ に収束する。この値を $\theta := r - \frac{1}{\eta}$ とおく。このようにして集積点 r から構成した組 (θ, η) を、**集積点 r に付随するペア**と呼ぶことにする。上極限の定義から、 $\mathcal{L}(\alpha)$ はこのようにして取れる部分列による集積点 r の上限である。下付き添字が多くて記号が煩雑になるので、これ以降この手順で部分列を取るときはその部分列の添字を n_i で表すことにする。

命題 3.2.3. 無理数 α に対して無限連分数展開を与える数列を $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ とし、 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ は有界であるとする。 a をこの数列の a_0 を除いた中での最大成分とする。数列 $(\lambda_n(\alpha))_{n=1}^{\infty}$ を考え、 r をその集積点とする。このとき、 r に付随するペア (θ, η) に対して θ, η は無理数であり、その連分数展開をそれぞれ $\theta = [b_0; b_1, \dots], \eta = [b_{-1}; b_{-2}, \dots]$ と表すことにすると各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して $1 \leq b_i \leq a$ となる。したがって特に $1 < \theta, \eta < a + 1$ が成立する。

証明. まず θ についての主張を示す。 $\theta \notin \mathbb{Q}$ であることを背理法で示す。 $\theta \in \mathbb{Q}$ と仮定し、その標準的な有限正則連分数展開を $\theta = [b_0; b_1, \dots, b_k]$ と書く。ただし、 θ が整数の場合は $k = 0$ と読む。

$k = 0$ の場合を先に考える。このとき $\theta = b_0$ である。 $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_{n_i+1} = \theta$ であるから、十分大きい i に対して α_{n_i+1} の整数部分は b_0 に等しい。したがって $\alpha_{n_i+1} = b_0 + 1/\alpha_{n_i+2}$ である。ところが数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の成分は a を超えないので $\alpha_{n_i+2} < a + 1$ であり、

$$\alpha_{n_i+1} - b_0 = \frac{1}{\alpha_{n_i+2}} > \frac{1}{a+1}$$

となる。これは $\alpha_{n_i+1} \rightarrow \theta = b_0$ に矛盾する。

次に $k \geq 1$ とし、 $0 \leq \ell \leq k$ に対して

$$\frac{p_\ell}{q_\ell} := [b_0; b_1, \dots, b_\ell]$$

と定める。 n_i を十分大きくとることで $|\alpha_{n_i+1} - \theta| < 1/(2q_k^2)$ とすることができる。このとき定理 2.3.10 より、有限連分数 $[b_0; b_1, \dots, b_k] = p_k/q_k$ は α_{n_i+1} の近似分数となる。したがって任意の $0 \leq \ell \leq k$ に対して $b_\ell = a_{n_i+\ell+1}$ である。よって (2.3.2) から

$$|\alpha_{n_i+1} - \theta| = \frac{1}{q_k(\alpha_{n_i+k+2}q_k + q_{k-1})}$$

が成り立つ。ところが $\alpha_{n_i+k+2} < a + 1$ であるから

$$|\alpha_{n_i+1} - \theta| > \frac{1}{(a+2)q_k^2}$$

が成り立つ。これは n_i をいくら大きく取っても $|\alpha_{n_i+1} - \theta|$ が 0 に近づかないことを意味し、 $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_{n_i+1} = \theta$ に矛盾する。以上から θ は無理数である。

あらためて $\theta = [b_0; b_1, \dots]$ とおく。この連分数を k 番目で打ち切った p_k/q_k を考えると、直前と同じ議論から十分大きい n_i をとることで $0 \leq \ell \leq k$ に対して $b_\ell = a_{n_i+\ell+1}$ となる。この k は任意に大きく取れるので、 θ の無限連分数展開は α_{n_i+1} の連分数展開から与えられる数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の成分で構成される。したがって各 b_i (ただし $i \geq 0$) に対して $1 \leq b_i \leq a$ である。 $1 < \theta < a + 1$ は直前で示した事実と補題 2.3.5 から直ちに従う。

次に η についての主張を示す。 $\eta \in \mathbb{Q}$ と仮定し、その標準的な有限正則連分数展開を $\eta = [b_{-1}; b_{-2}, \dots, b_{-k}]$ と書く。ただし、 η が整数の場合は $\eta = [b_{-1}]$ と読む。整数の場合は θ の $k = 0$

の場合と同じ議論により、十分大きい i に対して β_{n_i} は b_{-1} から一様に離れる。これは $\beta_{n_i} \rightarrow \eta$ に矛盾する。

したがって長さが2以上の場合を考えればよい。 $1 \leq \ell \leq k$ に対して

$$\frac{p_{-\ell}}{q_{-\ell}} := [b_{-1}; b_{-2}, \dots, b_{-\ell}]$$

と定める。このとき、 $\lim_{i \rightarrow \infty} \beta_{n_i} = \eta$ であることから n_i を十分大きくとることで $|\beta_{n_i} - \eta| < 1/(2q_{-k}^2)$ とすることができる。さらに $n_i \geq k + 2$ を満たすように n_i をとっておく。このとき定理 2.3.10 (と注 2.3.11) より、有限連分数 $[b_{-1}; b_{-2}, \dots, b_{-k}] = p_{-k}/q_{-k}$ は β_{n_i} の近似分数となるから、任意の $1 \leq \ell \leq k$ に対して $b_{-\ell} = a_{n_i - \ell + 1}$ である。ここで θ のときと同様に

$$|\beta_{n_i} - \eta| = \frac{1}{q_{-k}(\beta_{n_i - k} q_{-k} + q_{-(k-1)})}$$

が成り立つ。ただし、 $k = 1$ の場合は $q_0 := 0$ と読むことにする。あとは θ と同じ議論から η の主張がすべて従う。□

無理数 α に対して与えられる $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{n+1} + \frac{1}{\beta_n})$ の集積点 r とそれに付随するペア (θ, η) をとり $\theta := [b_0; b_1, \dots], \eta := [b_{-1}; b_{-2}, \dots]$ によって与えられる両側無限列 $\mathbf{b} := (\dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots)$ を考える。これを (θ, η) が与える両側無限数列と呼ぶ。このとき

$$\ell_0(\mathbf{b}) = [b_0; b_1, \dots] + [0; b_{-1}, b_{-2}, \dots] = \theta + \frac{1}{\eta} = r$$

を満たすことがわかる。

定理 3.2.4. 無理数 α に対して数列 $(\lambda_n(\alpha))_{n=1}^\infty$ を考え、この数列の集積点 r を任意にとる。 r に付随するペア (θ, η) が与える両側無限数列を $(\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, \dots)$ とする。このとき、任意の $h \in \mathbb{Z}$ に対して $\theta' := [b_h; b_{h+1}, \dots], \eta' := [b_{h-1}; b_{h-2}, \dots]$ として

$$r' := \ell_h(\mathbf{b}) = \theta' + \frac{1}{\eta'}$$

と定めると、 r' は $(\lambda_n(\alpha))_{n=1}^\infty$ の集積点となる。

証明. $h > 0$ のときを示す。 $\theta = [b_0; b_1, \dots, b_{h-1}, \theta']$ だから、 θ の近似分数を $\frac{p_k}{q_k}$ とすると

$$\theta = \frac{\theta' p_{h-1} + p_{h-2}}{\theta' q_{h-1} + q_{h-2}} \tag{3.2.1}$$

となる。数列 $(n_i)_{i=1}^\infty$ を $(\alpha_{n_i+1})_{i=1}^\infty$ が θ に、 $(\beta_{n_i})_{i=1}^\infty$ が η に収束するようにとる。 α_{n_i+1} の無限連分数展開は命題 3.2.3 の証明中の議論から十分大きな i に対して常に $\alpha_{n_i+1} = [b_0; b_1, \dots, b_{h-1}, \dots]$ 、すなわち $h - 1$ 番目までの成分を θ の無限連分数展開と一致させることができる。したがって $\alpha_{n_i+1} = [b_0; b_1, \dots, b_{h-1}, \alpha_{n_i+h+1}]$ を得る。ここから

$$\alpha_{n_i+1} = \frac{\alpha_{n_i+h+1} p_{h-1} + p_{h-2}}{\alpha_{n_i+h+1} q_{h-1} + q_{h-2}} \tag{3.2.2}$$

が成り立つ。(3.2.1) を θ' , (3.2.2) を α_{n_i+h+1} について解くと、ある $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\theta' = \frac{\theta a + b}{\theta c + d}, \quad \alpha_{n_i+h+1} = \frac{\alpha_{n_i+1} a + b}{\alpha_{n_i+1} c + d}$$

を満たす。したがって $\lim_{i \rightarrow \infty} (\alpha_{n_i+1}) = \theta$ の仮定から $\lim_{i \rightarrow \infty} (\alpha_{n_i+h+1}) = \theta'$ が成り立つ。一方 η については

$$\eta' = [b_{h-1}; b_{h-2}, \dots, b_0, \eta], \quad \beta_{n_i+h} = [b_{h-1}; b_{h-2}, \dots, b_0, \beta_{n_i}]$$

から同じ議論を使って $\lim_{i \rightarrow \infty} \beta_{n_i+h} = \eta'$ が示される。以上の議論から $r' = \theta' + \frac{1}{\eta'}$ は $(\lambda_n(\alpha))_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $(\lambda_{n_i+h}(\alpha))_{i=1}^{\infty}$ の極限となるので、 $(\lambda_n(\alpha))_{n=1}^{\infty}$ の集積点である。 $h < 0$ の場合についても同様の議論から従う（ただし θ と η の関係が逆になることに注意）。 \square

任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ であるような両側無限列 $(a_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ 全体の集合を \mathcal{A} とする。さらに、 $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ に対して

$$\mathcal{S}(\mathbf{a}) := \sup_{h \in \mathbb{Z}} \ell_h(\mathbf{a})$$

と定める。ただし上限が存在しない場合は $\mathcal{S}(\mathbf{a}) = \infty$ であるとする。このときこれまでの考察から次の定理が成り立つ。

定理 3.2.5. $\mathcal{S} := \{\mathcal{S}(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}$ とすると、 $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ である。

証明. $\infty \in \mathcal{L}$ に対しては、右側の部分商 a_h が非有界となる両側無限列 \mathbf{a} を取ればよい。実際、 $\alpha_h = [a_h; a_{h+1}, \dots]$ について $\alpha_h > a_h$ なので、

$$\sup_{h \in \mathbb{Z}} \ell_h(\mathbf{a}) \geq \sup_{h \in \mathbb{Z}} \alpha_h = \infty$$

が成立する。したがって $\infty \in \mathcal{S}$ がいえる。 $\mathcal{L}(\alpha) = r < \infty$ ならば、 $(\lambda_n(\alpha))_{n=1}^{\infty}$ の集積点として r が取れるので、この r に付随するペア (θ, η) によって与えられる両側無限数列 $\mathbf{b} = (\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots)$ を考える。このとき $\ell_0(\mathbf{b}) = r$ であり、定理 3.2.4 から任意の $h \in \mathbb{Z}$ に対して $\ell_h(\mathbf{b})$ が $(\lambda_n(\alpha))_{n=1}^{\infty}$ の集積点である。定理 3.1.3 から r は $(\lambda_n(\alpha))_{n=1}^{\infty}$ の集積点の上限なので、 $r = \mathcal{S}(\mathbf{b}) \in \mathcal{S}$ であることがわかる。以上から示された。 \square

この節の内容について、いくつか注意しておかなければならないことがあるのでこれを説明してこの節を終えることにする。まず、無理数 α の無限連分数展開から $(\lambda_n(\alpha))_{n=1}^{\infty}$ の集積点 r とそれに付随するペア (θ, η) から与えられる両側無限数列を計算するのは、一般には困難である。また r に付随するペア (θ, η) は、 η (η と θ を取る順番は逆にすることもでき、その場合は θ) の取り方にバリエーションがある場合があるので r に対して一意的とは限らず、集積点 r を与える両側無限数列は1つではないことがある。さらに、定理 3.2.4 では1つの集積点 r に対して両側無限数列を1つ固定するとそこから別の集積点 r' を見つける方法が与えられているが、1つの両側無限列からこの方法で与えられる $(\lambda_n(\alpha))_{n=1}^{\infty}$ の集積点が集積点全体をカバーすることまでは保証していない。「定理 3.2.5 はその保証ではないの？」と思うかもしれないが、そうではない。定理 3.2.5 で主張しているのは、ラグランジュ定数に収束する両側無限数列を取ると、その両側無限数列から得られる集積点の中での上限になっているという、ある意味「当たり前」ともいえるような事実でしかない。したがって、 r とそれに付随するペアから与えられる両側無限列 \mathbf{b} を1つ見つけられたとしても、 $\mathcal{S}(\mathbf{b})$ が $\mathcal{L}(\alpha)$ に一致するとは限らない。以上の点から、この節の内容だけを用いて一般の無理数 α に対して $\mathcal{L}(\alpha)$ を計算することは不可能である。

3.3 2次無理数のラグランジュ定数

前節の最後でさまざまな困難により一般の無理数に対するラグランジュ定数を両側無限列を使って計算することが難しいことを説明したが、 α の無限連分数展開が非常に綺麗な形を持つ場合はこれらの困難をクリアして計算することができることが知られている。その綺麗な形とは、無限連分数展開が純循環形である場合、すなわち α が簡約2次無理数の場合である。また、この計算結果を使って簡約でない2次無理数についてもラグランジュ定数が計算できる。この節ではこれについて説明しよう。

まず、2次無理数の議論をすべて簡約な2次無理数に押し付けられることを見ていく。ただし次の命題は2次無理数に限らず任意の無理数について成立する。

命題 3.3.1. α と β を $GL(2, \mathbb{Z})$ 同値な無理数とする。このとき、 $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\beta)$ が成り立つ。

証明. α と β の無限連分数展開を $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$, $\beta = [b_0; b_1, \dots]$ とする。定理 2.4.6 から、ある $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して、任意の $h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $a_{n+h} = b_{m+h}$ である。共通の尾を $\gamma = [c_0; c_1, c_2, \dots]$ と書くと、 α と β は有限個の初項を除いて同じ連分数展開をもつ。

$j \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} \rho_j &:= [c_j; c_{j+1}, \dots] + [0; c_{j-1}, \dots, c_0, a_{n-1}, \dots, a_1], \\ \sigma_j &:= [c_j; c_{j+1}, \dots] + [0; c_{j-1}, \dots, c_0, b_{m-1}, \dots, b_1] \end{aligned}$$

とおく。ただし $n = 0$ または $m = 0$ の場合には、対応する有限列 a_{n-1}, \dots, a_1 または b_{m-1}, \dots, b_1 を空列として読む。このとき

$$\mathcal{L}(\alpha) = \limsup_{j \rightarrow \infty} \rho_j, \quad \mathcal{L}(\beta) = \limsup_{j \rightarrow \infty} \sigma_j$$

である。

ここで、 ρ_j と σ_j の第1項は等しいので、差は第2項だけから生じる。補題 3.1.7 より、 $j \geq 2$ に対して

$$|\rho_j - \sigma_j| \leq \frac{1}{j(j-1)}$$

が成り立つ。したがって $|\rho_j - \sigma_j| \rightarrow 0$ である。任意の2つの実数列 x_j, y_j が $|x_j - y_j| \rightarrow 0$ を満たすとき $\limsup x_j = \limsup y_j$ であるから、 $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\beta)$ が従う。□

系 3.3.2. 2次無理数 α に対して、その連分数展開が $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_k, \overline{c_1, \dots, c_n}]$ であるとする。このとき、簡約2次無理数 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ を

$$\gamma_1 := [\overline{c_1, c_2, \dots, c_n}], \gamma_2 := [c_2, c_3, \dots, c_n, c_1], \dots, \gamma_n := [c_n, c_1, \dots, c_{n-1}]$$

と定めると、 $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\gamma_1) = \mathcal{L}(\gamma_2) = \dots = \mathcal{L}(\gamma_n)$ となる。

証明. 定理 2.4.6 と命題 3.3.1 からしたがう。□

以上の議論から、2次無理数のラグランジュ定数を調べるためにはそれと同値な簡約2次無理数を調べれば良いことがわかる。この節の主定理は次の定理である。

定理 3.3.3. $k \geq 1$ とし、 $b_0, \dots, b_{k-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。簡約 2 次無理数 α が無限連分数展開 $\alpha = \overline{[b_0, b_1, \dots, b_{k-1}]}$ をもつとする。このとき、両側無限数列 \mathbf{b} を循環節 b_0, b_1, \dots, b_{k-1} を左右両方向に繰り返し無限に伸ばした

$$\mathbf{b} = (\dots, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, \dots)$$

で与えたとき、

$$\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{S}(\mathbf{b})$$

が成立する。

証明. $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$ とする。 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が有界なので $\mathcal{L}(\alpha) < \infty$ であることに注意せよ。 $\alpha_{i+1} = [a_{i+1}; a_{i+2}, \dots]$, $\beta_i = [a_i; a_{i-1}, \dots]$ とする。 $(\lambda_n(\alpha))_{n=1}^{\infty}$ の集積点を考えるために、まず $(\alpha_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ の集積点となるものを考える。数列 $(\alpha_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ は無限連分数展開の純循環性により $\alpha_{n+1} = \alpha_i$ ($i \equiv n+1 \pmod{k}$) を満たす周期列なので、 $(\alpha_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ の集積点はこの k 個ですべてである。これらの点について、集積点であるという意味を強調するときは $\theta_i := \alpha_i$ (ただし $0 \leq i \leq k-1$) と書くことにする。

一方、 $\alpha_{n+1} = \alpha_i$ であるときの β_n は

$$\beta_n = [b_{i-1}; b_{i-2}, \dots, b_1, b_0, b_{k-1}, \dots, b_1, b_0, b_{k-1}, \dots, b_1]$$

という、 $b_{i-1}, b_{i-2}, \dots, b_i$ が循環的に有限回並び、最後は実際の添字 1 に対応する成分で終わる有限正則連分数である。このような状況になるのは、ある $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して $n+1 = mk+i$ となるときであり、さらにこのとき β_n の無限連分数展開において循環節は m 回現れる。以上のことから、極限が α_i になるような $(\alpha_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $(\alpha_{n_j+1})_{j=1}^{\infty}$ をとったとき、対応する $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$ の部分列 $(\beta_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ は十分大きな j より先の β_{n_j} 達について $(\beta_{mk+i-1})_{m=0}^{\infty}$ の部分列を成しており、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_{mk+i-1} = \overline{[b_{i-1}, b_{i-2}, \dots, b_1, b_0, b_{k-1}, \dots, b_i]}$$

なので、とくに $(\beta_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ の取りうる集積点は $\overline{[b_{i-1}, b_{i-2}, \dots, b_1, b_0, b_{k-1}, \dots, b_i]}$ のみである。この集積点を η_i と書くことにする。以上の議論から、 $(\lambda_n(\alpha))_{n=1}^{\infty}$ の集積点は

$$\left\{ r_i := \theta_i + \frac{1}{\eta_i} \mid 0 \leq i \leq k-1 \right\}$$

ですべてである。各 i に対して $r_i = \ell_i(\mathbf{b})$ であり、 $\mathcal{L}(\alpha)$ の値はこの r_i の上限 (ただし今回は集積点全体の集合が有限集合なので最大値でもある) であるから $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{S}(\mathbf{b})$ であることがわかる。□

ここまでの議論を用いることで、次の系が与えられる。

系 3.3.4. 2 次無理数 α が無限連分数展開 $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n, \overline{b_0, b_1, \dots, b_{k-1}}]$ をもつとする。このとき、両側無限数列 \mathbf{b} を循環節 b_0, b_1, \dots, b_{k-1} を左右両方向に繰り返し無限に伸ばした

$$\mathbf{b} = (\dots, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, \dots)$$

で与えたとき、

$$\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{S}(\mathbf{b})$$

が成立する。

上記の系において $\mathcal{S}(\mathbf{b})$ を計算する際の上限值（最大値）の候補は有限個なので、頑張れば手計算でも $\mathcal{L}(\alpha)$ を求められるであろう。この章の最後に、 α のラグランジュ定数を α の連分数展開に付随する連分数行列を用いた形で与えることにする。これを使えば、 $\mathcal{L}(\alpha)$ の計算はさらに楽になる。ここでは有限数列 (a_0, \dots, a_k) に対して

$$F_{(a_0, a_1, \dots, a_k)} := \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

という記号を導入することにする。

定理 3.3.5. α を 2 次無理数とし、その無限連分数展開の空でない循環節が (b_0, \dots, b_{k-1}) で与えられるとする（したがって $k \geq 1$ ）。任意の $0 \leq i \leq k-1$ に対して $S_i := (b_i, b_{i+1}, \dots, b_{k-1}, b_0, \dots, b_{i-1})$ とする。このとき、

$$\mathcal{L}(\alpha) = \max \left\{ \frac{\sqrt{(\text{tr}(F_{S_i}))^2 - (-1)^k \cdot 4}}{(F_{S_i})_{21}} \mid 0 \leq i \leq k-1 \right\}$$

となる。ただし、 $(F_{S_i})_{21}$ は F_{S_i} の $(2, 1)$ 成分を意味する。

証明. 添字は k を法として読むものとする。 $\theta_i = \overline{[b_i, b_{i+1}, \dots, b_{k-1}, b_0, \dots, b_{i-1}]}$, $\eta_i = \overline{[b_{i-1}, b_{i-2}, \dots, b_0, b_{k-1}, \dots, b_i]}$ とおく。系 3.3.4 より、

$$\theta_i + \frac{1}{\eta_i} = \frac{\sqrt{(\text{tr}(F_{S_i}))^2 - (-1)^k \cdot 4}}{(F_{S_i})_{21}}$$

を示せば十分である。 $\theta_i = [b_i; b_{i+1}, \dots, b_{i-1}, \theta_i]$ であるから、命題 2.4.5 より $\theta_i = F_{S_i} \theta_i$ が成立する。

$$F_{S_i} = \begin{bmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{bmatrix}$$

とおくと、作用の定義から

$$\theta_i = \frac{\theta_i p_{k-1} + p_{k-2}}{\theta_i q_{k-1} + q_{k-2}}$$

これを解くことで

$$\begin{aligned} \theta_i &= \frac{p_{k-1} - q_{k-2} + \sqrt{(p_{k-1} - q_{k-2})^2 + 4p_{k-2}q_{k-1}}}{2q_{k-1}} \\ &= \frac{p_{k-1} - q_{k-2} + \sqrt{(p_{k-1} + q_{k-2})^2 - 4(p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1})}}{2q_{k-1}} \\ &= \frac{p_{k-1} - q_{k-2} + \sqrt{(\text{tr}(F_{S_i}))^2 - (-1)^k \cdot 4}}{2(F_{S_i})_{21}} \end{aligned}$$

が成り立つ (θ_i は 2 次共役 θ'_i より大きいので根号の前の符号は + であることに注意せよ)。一方、命題 2.5.10 より $\eta_i = -\frac{1}{\theta'_i}$ である。したがって、

$$\frac{1}{\eta_i} = -\frac{p_{k-1} - q_{k-2} - \sqrt{(\text{tr}(F_{S_i}))^2 - (-1)^k \cdot 4}}{2(F_{S_i})_{21}}$$

であるから、

$$\theta_i + \frac{1}{\eta_i} = \frac{\sqrt{(\text{tr}(F_{S_i}))^2 - (-1)^k \cdot 4}}{(F_{S_i})_{21}}$$

を得る。 □

定理 3.3.5 の証明中で得られる $\theta_i + \frac{1}{\eta_i}$ の形を見ると、この分数の分子は F_{S_i} のトレースの値に依存していることがわかるが、実はこの値はすべての i に対して同じ値となる。なぜならば

$$F_{S_{i+1}} = \begin{bmatrix} b_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} F_{S_i} \begin{bmatrix} b_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ただし $S_k := S_0$ とする) とかけ、行列の一般論として $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ が成り立つので

$$\text{tr}(F_{S_{i+1}}) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} b_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} F_{S_i} \begin{bmatrix} b_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{tr} \left(F_{S_i} \begin{bmatrix} b_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \right) = \text{tr}(F_{S_i})$$

となるからである。つまり $\mathcal{L}(\alpha)$ の値の候補について計算するとき、その分子の計算は 1 回するだけでよい。また、 $\mathcal{L}(\alpha)$ の値を決めるのに重要なのは $(F_{S_i})_{21}$ の値である。これを命題の形で述べておくことにしよう。

命題 3.3.6. 定理 3.3.5 の状況において、

$$\min_{0 \leq i \leq k-1} \{(F_{S_i})_{21}\} = (F_{S_j})_{21}$$

を満たす $j \in \{0, \dots, k-1\}$ に対して

$$\mathcal{L}(\alpha) = \frac{\sqrt{(\text{tr}(F_{S_j}))^2 - (-1)^k \cdot 4}}{(F_{S_j})_{21}}$$

である。

以上を踏まえて、具体的な 2 次無理数についてラグランジュ定数を計算してみよう。

例 3.3.7. $\alpha = 1 + \sqrt{3}$ のラグランジュ定数を計算する。まず α の無限連分数展開を求める。

$$\alpha - 2 = \sqrt{3} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3} + 1},$$

だから

$$\frac{1}{\alpha - 2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha}.$$

したがって

$$\alpha = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}}$$

が成り立つ。したがって $\alpha = [2, 1]$ であり、循環節は $(2, 1)$ 、周期の長さは $k = 2$ である。定理 3.3.5 を用いて $\mathcal{L}(\alpha)$ を計算しよう。循環節のローテーションは

$$S_0 = (2, 1), \quad S_1 = (1, 2)$$

の 2 通りである。それぞれについて連分数行列を計算すると

$$F_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

いずれの場合も $\text{tr}(F_{S_i}) = 4$ である。一方、 $(F_{(2,1)})_{21} = 1$ 、 $(F_{(1,2)})_{21} = 2$ である。ここで $k = 2$ であるから $(-1)^k = 1$ となり、定理 3.3.5 より

$$\mathcal{L}(\alpha) = \max_{i=0,1} \left\{ \frac{\sqrt{(\text{tr}(F_{S_i}))^2 - 4}}{(F_{S_i})_{21}} \right\} = \max \left\{ \frac{\sqrt{12}}{1}, \frac{\sqrt{12}}{2} \right\} = 2\sqrt{3}.$$

以上より $\mathcal{L}(1 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ が成り立つ。

これらの議論から、2次無理数のラグランジュスペクトラムに関しては $(F_{S_j})_{21}$ が最小になるような循環節の切り出し方さえわかれば計算できることがわかったが、 $(F_{S_j})_{21}$ が最小になる循環節の切り方の特定方法については、現状では候補をすべて計算して比較するという一番素直な方法しか与えられていない。ただし、特定のクラスの2次無理数については候補を計算しなくても済む方法が与えられており、このクラスについては第II部でより深く議論することになる。

第4章

マルコフスペクトラム

本章ではマルコフスペクトラムを取り上げる。マルコフスペクトラムは不定2次形式の最小値問題から現れる集合であり、一見すると前章のラグランジュスペクトラムとはかなり異なる対象のように見える。しかし、連分数と両側無限数列を用いて記述し直すことで、両者は実は非常に似た構造を持っていることがわかる。

ここでは、まず2変数2次形式に付随するマルコフ定数を定義し、具体例を通してその意味を確認する。次に、標準簡約2次形式とユニモジュラー群の作用を用いて2次形式の中でマルコフ定数を計算しやすい代表元を与える。そのうえで、前章のラグランジュ定数と同様に、マルコフ定数を両側無限数列によって表すことで、両スペクトラムを共通の枠組みの中で比較できるようにする。最後に、有理数係数2次形式のマルコフ定数が、それに対応する2次無理数のラグランジュ定数と一致することを示す。これにより、2次無理数のラグランジュ定数・有理数係数2次形式のマルコフ数・循環両側無限列の切断に関する和の上限という3つの対象が同じ値を与えることが明らかになる。

この章の内容は [Reu19, LMMR20] を参考にしている。

4.1 定義と最初の具体例

まずはマルコフスペクトラムと呼ばれる集合を導入する。

定義 4.1.1. 2変数実2次形式 Q をとる。ここで、 Q は不定値であることを仮定する。すなわち、 $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ に対して $D(Q) := b^2 - 4ac > 0$ であるとする。ただし、 $Q(x, y)$ が $(0, 0)$ 以外の全ての格子点 $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ で $Q(x, y) \neq 0$ であることを仮定する。このとき

$$\mathcal{M}(Q) := \frac{\sqrt{D(Q)}}{\inf_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |Q(x,y)|}$$

を、 Q に付随する **マルコフ定数** と呼ぶ。ただし、分母の下限が0の場合は $\mathcal{M}(Q) = \infty$ と定める。マルコフ定数全体の集合

$$\mathcal{M} := \left\{ \mathcal{M}(Q) \mid \begin{array}{l} Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, \ a, b, c \in \mathbb{R}, \ D = b^2 - 4ac > 0, \\ (0, 0) \text{ 以外の全ての格子点 } (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ で } Q(x, y) \neq 0 \end{array} \right\}$$

を **マルコフスペクトラム** と呼ぶ。

以下、考える2次形式は全て2変数実2次形式なのでこれを単に2次形式と呼ぶことにする。2次形式 Q を $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ としたときの $\mathcal{M}(Q)$ が well-defined (ここでは $\mathcal{M}(Q)$ が

$(0,0)$ 以外の格子点を根に持たないこと)*¹ であるための必要十分条件をもう少し掘り下げよう。次の命題を考える。

命題 4.1.2. $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ において $a, b, c \in \mathbb{R}$ かつ $D > 0$ であり、また $a \neq 0$ とする。このとき、 $(0,0)$ 以外の格子点 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ で $Q(\alpha, \beta) = 0$ となるものが存在しないことと、多項式 $Q(x, 1)$ が2つの相異なる無理数根をもつことは同値である。

証明. $D(Q) > 0$ から $Q(x, 1)$ は重根を持たないことに注意せよ。 $(0,0)$ でない格子点 (α, β) が $Q(\alpha, \beta) = 0$ を満たすと仮定する。 $\beta = 0$ とすると $a\alpha^2 = 0$ となるが、 $a \neq 0$ かつ $\alpha \neq 0$ に反する。したがって $\beta \neq 0$ である。 $Q(\alpha, \beta) = 0$ を β^2 で割ると

$$a \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 + b \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) + c = 0$$

を得る。よって $x = \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ は $Q(x, 1) = 0$ の解である。したがって、 $Q(x, 1)$ の根の少なくとも1つは無理数ではない。逆に2つの解のどちらかが無理数でないとき、 $Q(x, 1) = 0$ が有理数解 $x = \frac{\alpha}{\beta}$ (既約分数) をもつ。このとき、両辺を β^2 倍することで $Q(\alpha, \beta) = 0$ を得る。□

また、次の命題も成り立つ。

命題 4.1.3. $\mathcal{M}(Q)$ が well-defined ならば $a \neq 0$ かつ $c \neq 0$ である。

証明. $a = 0$ であるとする。例えば $Q(1, 0) = 0$ であるから $\mathcal{M}(Q)$ は定義されない。一方で $c = 0$ であるとする。例えば $Q(0, 1) = 0$ であるからやはり $\mathcal{M}(Q)$ は定義されない。よって $\mathcal{M}(Q)$ が定義されるためには $a \neq 0$ かつ $c \neq 0$ でなければならない。以上から示された。□

上記2つの命題から次の系を得る。

系 4.1.4. $\mathcal{M}(Q)$ が well-defined であることと $Q = ax^2 + bxy + cy^2$ について $Q(x, 1)$ が無理数根を2つ持つことは同値である。

証明. $\mathcal{M}(Q)$ が well-defined であるとする。命題 4.1.3 から $a \neq 0$ であり、また $Q(x, y)$ は $(0,0)$ でない格子点を根に持たないので命題 4.1.2 から $Q(x, 1)$ が無理数根を2つ持つ。逆に $Q(x, 1)$ が無理数根を2つ持つときは $a \neq 0$ なので命題 4.1.2 から $Q(x, y)$ は $(0,0)$ でない格子点を根に持たないので $\mathcal{M}(Q)$ が well-defined であることがわかる。□

例 4.1.5. こちらに関してもラグランジュスペクトラム同様に具体例を見ていこう。

- (1) $Q(x, y) = x^2 - xy - y^2$ とする。このとき $D(Q) = 5$ であり、また $Q(x, 1)$ の根は $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ であるから $(0,0)$ でない任意の格子点で $Q(x, y) \neq 0$ である。また $Q(x, y)$ は整数係数であるから、格子点 (α, β) に対して $|Q(\alpha, \beta)| \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ である。いま $Q(1, 0) = 1$ となるので、 $\inf_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |Q(x, y)| = 1$ である。以上から、 $\mathcal{M}(Q) = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$ である。
- (2) $Q(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$ とする。このとき $D(Q) = 8$ であり、また $Q(x, 1)$ の根は $1 \pm \sqrt{2}$ であるから $(0,0)$ でない任意の格子点で $Q(x, y) \neq 0$ である。また $Q(x, y)$ は整数係数で

*¹ 本稿では $\mathcal{M}(Q) = \infty$ であることと $\mathcal{M}(Q)$ が well-defined でないことは違うものとして区別されていることに注意せよ。

あるから、格子点 (α, β) に対して $|Q(\alpha, \beta)| \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ である。いま $Q(1, 0) = 1$ となるので、 $\inf_{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}} |Q(x, y)| = 1$ である。以上から、 $\mathcal{M}(Q) = \frac{\sqrt{8}}{1} = 2\sqrt{2}$ である。

4.2 2次形式のユニモジュラー群軌道

この節では、2次形式のマルコフ定数を計算するための準備として、2次形式をユニモジュラー群によって軌道分解することを考えていく。さらに、その各軌道において性質の良い代表元である標準簡約2次形式を取れることも見る。2.5節では2次無理数に対して同じようなことをやっているが、ここで扱う内容はその議論の二次無理数と二次形式の対応とみることもできる。

まず最初に、 $\mathcal{M}(Q)$ が well-defined となるような2次形式全体の集合にユニモジュラー群による作用を導入しよう。集合 \mathcal{Q} を

$$\mathcal{Q} := \left\{ Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, a, b, c \in \mathbb{R}, D(Q) = b^2 - 4ac > 0, \\ (0, 0) \text{ 以外の全ての格子点 } (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ で } Q(x, y) \neq 0 \end{array} \right\}$$

で与える。このとき系 4.1.4 から常に $Q(x, 1)$ が無理数根を2つ持つことに注意せよ。 $A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ と2次形式 $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \in \mathcal{Q}$ に対して、 QA を

$$QA(x, y) := Q(px + qy, rx + sy) \quad (4.2.1)$$

で定義する。このとき、次が成り立つ。

定理 4.2.1. $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ と $Q \in \mathcal{Q}$ に対して $QA \in \mathcal{Q}$ である。さらにこの変換は右作用 $\mathcal{Q} \curvearrowright GL(2, \mathbb{Z})$ を与える。

証明. まず $Q \in \mathcal{Q}$ に対して $QA \in \mathcal{Q}$ であることを示す。

$$QA(x, y) = Q(px + qy, rx + sy) = (ap^2 + bpr + cr^2)x^2 + (2apq + b(ps + qr) + 2crs)xy + (aq^2 + bqs + cs^2)y^2$$

であるから

$$D(QA) = (2apq + b(ps + qr) + 2crs)^2 - 4(ap^2 + bpr + cr^2)(aq^2 + bqs + cs^2) = (b^2 - 4ac)(ps - qr)^2$$

が成り立つ。ここで $ps - qr = \pm 1$ だから、結局 $D(QA) = D(Q)$ となり、特に $D(QA) > 0$ である。

さらに、 A を \mathbb{R}^2 上の線形変換

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} px + qy \\ rx + sy \end{bmatrix}$$

としてみると、 $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ より、これは $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に制限できて、さらに全単射であることがわかる。したがって、 Q が $(0, 0)$ 以外のすべての格子点 $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ で $Q(x, y) \neq 0$ であることから QA もそうである。以上から $QA \in \mathcal{Q}$ であることが示された。 $QE_2 = Q$ であること、 $(QB)A = Q(BA)$ であることは A, B が上記のように \mathbb{R}^2 上の線形変換としてみれることから従う。□

これを踏まえて、集合 \mathcal{Q} にもユニモジュラー同値を導入しよう。

定義 4.2.2. $Q, R \in \mathcal{Q}$ に対して、ある $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ が存在して $R = QA$ となると、 Q と R はユニモジュラー同値 (以下、単に同値) といい、 $Q \sim R$ で表す。また、この同値関係による同値類

$$O_Q = \{R \mid R \sim Q\}$$

を Q のユニモジュラー軌道 (以下、単に軌道) という。

$D(Q) = d$ であるような \mathcal{Q} の元全体を $\mathcal{Q}(d)$ と書くことにしよう。ユニモジュラー群による作用は D の値を変えないことが定理 4.2.1 の証明中で示されていたので、特に次の系が成り立つ。

系 4.2.3. \mathcal{Q} 上のユニモジュラー群による作用 (4.2.1) は $\mathcal{Q}(d)$ 上の右作用を定める。

さて、2.5 節の系 2.5.6 では、 α が 2 次無理数の場合についてこれとユニモジュラー同値な簡約 2 次無理数 β をとってくることができた。これと同じようなことを \mathcal{Q} の元でも行うことができる。これを見るために、まずは簡約 2 次形式を導入する。

定義 4.2.4. 不定値 2 次形式 $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ に対して、 $Q(x, 1)$ が相異なる 2 つの根 α, β をもち、

$$|\alpha| > 1, |\beta| < 1, \alpha\beta < 0$$

を満たすならば、 Q を簡約 2 次形式と呼ぶ。さらに、上記の条件に加えて $\alpha > 1$ であるようなものを標準簡約 2 次形式*2と呼ぶ。

2 次形式の簡約性を x と y の対称性が破綻しているように見える $Q(x, 1)$ の根で決めることに違和感を持つ人もいるかもしれないが、この条件は実は対称性を失っていない。実際、 $Q(x, 1)$ の根と $Q(1, y)$ の根は (根が 0 でなければ) 互いに逆数の関係にあるので、簡約性を $Q(1, y)$ の根が同様の条件を満たすとして定義しても、これは上記の定義と同値な定義になる。

$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ の係数 a, b, c を有理数に制限したとき、 $Q(x, 1)$ の根は、少なくとも 1 つが無理数であればもう片方も無理数であり、それらは互いに 2 次共役な 2 次無理数になる。このとき、 $Q(x, y)$ が標準簡約 2 次形式であれば $\alpha > 1$ かつ $-1 < \beta < 0$ が成り立つので、 α は簡約 2 次無理数である。逆に α を簡約 2 次無理数とすると、 α を解にもつような有理数係数 2 次形式は常に標準簡約 2 次形式である。この観点から見ると、標準簡約 2 次形式は簡約 2 次無理数を一般の無理数に拡張したような概念であるといえる。

さて、 \mathcal{Q} に属する標準簡約 2 次形式全体の集合を \mathcal{R} とかき、 $D = d$ であるようなものの全体を $\mathcal{R}(d)$ とする。次の定理を示そう。

定理 4.2.5. $Q \in \mathcal{Q}(d)$ に対してある $R \in \mathcal{R}(d)$ が存在して $Q \sim R$ である。したがって、 $\mathcal{Q}(d)$ の各軌道の代表元として $\mathcal{R}(d)$ の元がとれる。とくに、 \mathcal{Q} の各軌道の代表元として \mathcal{R} の元がとれる。

この定理を証明するために、まず次の補題を示す。

補題 4.2.6. $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ とする。 $Q \in \mathcal{Q}$ について、 $Q(x, 1)$ の根が α, β であるとき $Q\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1}(x, 1)$ の根は $\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}, \frac{p\beta+q}{r\beta+s}$ である。また、 $Q(1, y)$ の根が α, β であるとき $Q\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1}(1, y)$ の根は $\frac{s\alpha+r}{q\alpha+p}, \frac{s\beta+r}{q\beta+p}$ である。

*2 この単語は一般的ではなく、テキストによってはこれを単に簡約 2 次形式と呼ぶことも多い。

証明. 前半を示す。ここで根 α, β は無理数であり、 p, q, r, s は整数であるから、 $r\alpha + s$ や $r\beta + s$ などの分母に現れる一次式は 0 にならない。 $Q\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1}(x, 1)$ を計算すると

$$\begin{aligned} Q\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1}(x, 1) &= Q\begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix}(x, 1) = Q(sx - q, -rx + p) \\ &= \frac{1}{(-rx + p)^2} Q\left(\frac{sx - q}{-rx + p}, 1\right) \end{aligned}$$

である。ただし、行列式が -1 の場合に逆行列へ現れる全体の符号は、2次形式の値には影響しない。ここで、 $Q(\alpha, 1) = 0$ なので、 $\alpha = \frac{sx - q}{-rx + p}$ ならば $Q\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1}(x, 1) = 0$ を満たす。 $\alpha = \frac{sx - q}{-rx + p}$ を変形すると $x = \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s}$ なので、これは $Q\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1}(x, 1) = 0$ の解である。後半も同様の議論から従う。□

定理 4.2.5 の証明. $Q(x, 1)$ の根を α, β (ただし $\alpha > \beta$ とする) とすると、命題 4.1.2 からこれらはどちらも無理数である。まず Q と同値な 2次形式 Q' で $\alpha > 0 > \beta$ となるようなものがとれることを示す。根がすでに $\alpha > 0 > \beta$ を満たしている場合は $Q = Q'$ とする。次に $0 > \alpha > \beta$ の場合は、十分大きい整数 h をとり、 Q を $Q\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ に置き換える。補題 4.2.6 より根は $\alpha + h, \beta + h$ となるので、どちらも正の場合に帰着される。

したがって、以下では $\alpha > \beta > 0$ の場合を考えればよい。共通部分商を削る操作では根の大小が反転する場合があるので、各段階で必要なら根の名前を入れ替え、再び大きい根を α 、小さい根を β と呼ぶことにする。それぞれの無限正則連分数展開を $\alpha = [a_0; a_1, \dots], \beta = [b_0; b_1, \dots]$ とする。 $a_i \neq b_i$ を満たす最小の i を m とおく。次の手順で Q と同値な 2次形式 Q' であって $Q'(x, 1)$ の根 α', β' が $\alpha' > 0 > \beta'$ であるようなものが取れる。まず $m = 0$ の場合、必要なら根の名前を入れ替えることで $a_0 > b_0$ としてよいので $\alpha - a_0 > 0 > \beta - a_0$ となる。 $\alpha - a_0, \beta - a_0$ が根となるような $Q'(x, 1)$ は、補題 4.2.6 より $Q'(x, 1) = Q\begin{bmatrix} 1 & -a_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}(x, 1)$ とすることで得られる。したがって、 $Q' = Q\begin{bmatrix} 1 & -a_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ で目的の Q' を得る。次に、 $m \neq 0$ である場合を考える。このとき、 $Q_1(x, 1) := Q\begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_0 \end{bmatrix}^{-1}(x, 1)$ とすると、 $Q_1(x, 1)$ の根が $\alpha_1 := [a_1; a_2, \dots], \beta_1 := [b_1; b_2, \dots]$ となる。したがって、 Q を同値な $Q_1 := Q\begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_0 \end{bmatrix}^{-1}$ に置き換えることで、 m の値を 1 以上減らすことができる。同様の置換操作を $m = 0$ になるまで行えば、あとは $m = 0$ の場合と同じ方法で Q' を構成することができる。

以上の議論から、必要に応じて Q を同値な Q' に置き換えることで Q について $Q(x, 1)$ の根 α, β が $\alpha > 0 > \beta$ であることを仮定してよい。 $|\alpha| > 1$ かつ $|\beta| < 1$ ならば $R = Q$ として目的の 2次形式を得る。 $|\alpha|, |\beta| > 1$ ならば、 $-1 < \beta + h < 0$ を満たす整数 h をとって $R = Q\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ とすれば目的の 2次形式が取れる。 $|\alpha|, |\beta| < 1$ ならば $\tilde{Q} := Q\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ を取ると、 $\tilde{Q}(x, 1)$ の根は $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ になるので上のケースに帰着できる。 $|\alpha| < 1$ かつ $|\beta| > 1$ ならば $R = \tilde{Q}$ とすればよい。以上から示された。□

補題 4.2.6 は 2次形式のユニモジュラー群作用がその根のユニモジュラー群作用を与えていることを意味しており、これを用いることで 2.5 節の内容の一部を再解釈することができる。例えば、系 2.5.6 は $Q(x, 1)$ が α を根に持つような Q に対して定理 4.2.5 を適用することで直ちに証明することができる (なお、2.5 節で系 2.5.6 を与える根拠になっている定理 2.5.5 は 2次無理数のみが持つ強い性質なので、この定理を一般の 2次形式について拡張することは不可能である)。この観点からも、2次形式によるこれらの理論が 2次無理数で展開されていた理論のある種の一般化と呼べるものであることがわかるであろう。

4.3 マルコフ定数の両側無限列による表示

さてここからは、マルコフ定数をラグランジュ定数と同様に両側無限列をつかって計算する方法をみていくことにしよう。次の系は定理 4.2.1 の精密化であり、この定理から直ちに従う。

系 4.3.1. $Q, R \in \mathcal{Q}$ に対して $Q \sim R$ ならば $\mathcal{M}(Q) = \mathcal{M}(R)$ が成り立つ。

証明. マルコフ定数の定義は

$$\mathcal{M}(Q) = \frac{\sqrt{D(Q)}}{\inf_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |Q(x,y)|}$$

なので、 $D(Q) = D(R)$ かつ $\inf_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |Q(x,y)| = \inf_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |R(x,y)|$ を示せば十分。定理 4.2.1 の証明から $D(Q) = D(R)$ がわかっており、また $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ による \mathbb{R}^2 上の線形変換は格子点を格子点に、その中でも原点を原点に送る全単射なので、

$$\inf_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |R(x,y)| = \inf_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |Q(px + qy, rx + sy)| = \inf_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |Q(x,y)|$$

が成り立つ。以上から示された。 \square

系 4.3.2. 次の等式が成り立つ。

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{M}(Q) \mid Q \in \mathcal{R}\}$$

証明. 定理 4.2.5 と系 4.3.1 から直ちに従う。 \square

次の定理が本節の主定理である。

定理 4.3.3. $Q \in \mathcal{R}$ として、 $Q(x, 1)$ の 2 つの無理数根を $\theta, -\frac{1}{\eta}$ とする (ただし $\theta, \eta > 1$ とする)。 θ, η の連分数展開 $\theta = [a_0; a_1, \dots]$, $\eta = [a_{-1}; a_{-2}, \dots]$ から両側無限数列

$$\mathbf{a} = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$$

を構成する。このとき、 $\mathcal{M}(Q) = \mathcal{S}(\mathbf{a})$ が成立する。

この節の残りでこの定理を示すが、その前にこの定理の意味するところについて考えてみよう。ラグランジュ定数の場合は 2 次無理数の場合でしか無限連分数展開から両側無限連分数を構成できなかったが、マルコフ定数はもっと話が単純で、 $Q \in \mathcal{R}$ でさえあれば常に $Q(x, 1)$ の無理数根の無限連分数展開から両側無限連分数を構成できることがこの定理からわかる。これにより無理数 $\theta, \eta > 1$ を自由に選んで $Q = (x - \theta y)(x + \frac{1}{\eta} y)$ とすることで任意の両側無限列 \mathbf{a} に対応する $Q \in \mathcal{R}$ が構成できるので、次の系が成り立つ。

系 4.3.4. $\mathcal{M} = \mathcal{S}$ が成り立つ。とくに定理 3.2.5 から $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ である。

以下、定理 4.3.3 を示すための準備をしていく。 $\delta \in \mathbb{Z}$ に対して

$$F_\delta := \begin{bmatrix} \delta & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とする。

補題 4.3.5. $Q \in \mathcal{R}$ に対して、 $Q(x, 1)$ の根が $\theta, -\frac{1}{\eta}$ (ただし $\theta, \eta > 1$) であるとする。このとき QF_{δ}^{-1} と QF_{ε} は、それぞれ

$$\delta = \delta_0 := \lfloor \eta \rfloor, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 := \lfloor \theta \rfloor$$

のとき、またそのときに限り $QF_{\delta}^{-1}, QF_{\varepsilon} \in \mathcal{R}$ となる。

このような $QF_{\delta_0}^{-1}, QF_{\varepsilon_0}$ を、それぞれ Q の左隣、右隣という。

証明. $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \in \mathcal{R}$ をとる。任意の $\gamma \in \mathbb{Z}$ に対して $F_{\gamma} \in GL(2, \mathbb{Z})$ なので、 QF_{γ} と QF_{γ}^{-1} が Q に含まれていることは良い。したがって示すべきは $QF_{\delta_0}^{-1}, QF_{\varepsilon_0}$ が標準簡約となり、かつそれ以外の場合に標準簡約になり得ないことである。まずは $QF_{\delta_0}^{-1}$ が標準簡約であることを示そう。補題 4.2.6 から $QF_{\delta_0}^{-1}(x, 1)$ の根を α', β' とすると

$$\alpha' = \frac{\delta_0 \theta + 1}{\theta} = \delta_0 + \frac{1}{\theta} = \lfloor \eta \rfloor + \frac{1}{\theta}, \quad \beta' = \frac{-\delta_0 \frac{1}{\eta} + 1}{-\frac{1}{\eta}} = \delta_0 - \eta = \lfloor \eta \rfloor - \eta$$

となる。ここで $\alpha' > 1, -1 < \beta' < 0$ となることは明らかである。以上から $QF_{\delta_0}^{-1}$ が標準簡約であることがいえた。また、 $\alpha' > 1, -1 < \beta' < 0$ を満たす δ が δ_0 以外にないことは $-1 < \beta' < 0$ となるような δ が δ_0 以外にないことから明らかである。以上から一意的であることが示された。

次に QF_{ε_0} の標準簡約性と一意性について示す。 $X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ として、2次形式 QX を考える。 $X^{-1} = -X$ であり、2次形式は2次斉次なので $Q(-X^{-1}) = QX^{-1}$ である。したがって $QX(x, 1)$ の根は補題 4.2.6 より $-\frac{1}{\theta}, \eta$ であり、標準簡約性を保つので $QX \in \mathcal{R}$ である。このとき、直前の証明から QX の左隣 $QXF_{\varepsilon_0}^{-1}$ が取れる。これにさらに $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ を右から作用させることで標準簡約な2次形式 $QXF_{\varepsilon_0}^{-1}Y$ が取れる (Y の作用が標準簡約性を保つことは X の場合と同様にして示される)。ここで

$$XF_{\varepsilon_0}^{-1}Y = - \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -F_{\varepsilon_0}$$

が成り立つ。2次形式は行列全体を -1 倍しても同じ作用を受けるので、 QF_{ε_0} は標準簡約であることが示された。一意性を示す。 $\varepsilon'_0 \in \mathbb{Z}$ に対して $QF_{\varepsilon'_0}$ が標準簡約であると仮定する。このとき、 $XF_{\varepsilon'_0}^{-1}Y = -F_{\varepsilon'_0}$ であり、全体の符号は2次形式への作用に影響しないことから $QXF_{\varepsilon'_0}^{-1}Y$ が標準簡約で、また $Y^2 = -I$ であり、 $-I$ の作用は2次形式を変えないので、 $QXF_{\varepsilon'_0}^{-1}YY$ 、すなわち符号を除いて $QXF_{\varepsilon'_0}^{-1}$ が標準簡約である。これは QX の左隣なので、左隣の一意性から $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0$ である。以上から示された。□

右隣と左隣の関係性について、一点確認しておかなければいけないことがある。それは、 Q の左隣の右隣が Q に戻ってくる (あるいは逆も然り) という、ある意味当然とも思えることである。右隣を与えるために作用させる行列と左隣を与えるために作用させる行列は互いに逆行列の関係にあるんだからそれはそうでしょうと言いたいところだが、左隣を与える δ と右隣を与える ε は2次形式ごとに独立して定まるので、 Q の δ と Q の左隣の ε が一致することを確かめないといけないのである。

命題 4.3.6. $Q_0 \in \mathcal{R}$ とする。 Q_0 の右隣を Q_1 とすると、 Q_1 の左隣は Q_0 である。また Q_0 の左隣を Q_{-1} とすると、 Q_{-1} の右隣は Q_0 である。

証明. $Q_0(x, 1)$ の2つの根を $\theta_0, -\frac{1}{\eta_0}$ (ただし $\theta_0, \eta_0 > 1$) とする。さらに

$$\theta_0 = [a_0; a_1, \dots], \quad \eta_0 = [a_{-1}; a_{-2}, \dots]$$

と無限連分数展開されるとする。 $i = \pm 1$ について $Q_i(x, 1)$ の2つの根を $\theta_i, -\frac{1}{\eta_i}$ (ただし $\theta_i, \eta_i > 1$) とする。このとき、

$$Q_0 = Q_0 F_{\delta_0}^{-1} F_{\varepsilon_{-1}}, \quad Q_0 = Q_0 F_{\varepsilon_0} F_{\delta_1}^{-1}$$

を示す。ここで

$$\delta_i := [\eta_i], \quad \varepsilon_i := [\theta_i]$$

とする。まず定義から $\delta_0 = a_{-1}, \varepsilon_0 = a_0$ である。 $Q_{-1} = Q_0 F_{\delta_0}^{-1}$ とすると、補題 4.3.5 より $\delta_0 = [\eta_0]$ となるので

$$\theta_{-1} = [\eta_0] + \frac{1}{\theta_0} = [a_{-1}; a_0, \dots], \quad -\frac{1}{\eta_{-1}} = [\eta_0] - \eta_0 = -[0; a_{-2}, a_{-3}, \dots]$$

が得られる。したがって $\varepsilon_{-1} = a_{-1} = \delta_0$ となり $Q_0 = Q_0 F_{\delta_0}^{-1} F_{\varepsilon_{-1}}$ が示された。次に $Q_1 = Q_0 F_{\varepsilon_0}$ とすると補題 4.3.5 より $\varepsilon_0 = [\theta_0]$ となるので

$$\theta_1 = \frac{1}{\theta_0 - [\theta_0]} = \frac{1}{[0; a_1, a_2, \dots]} = [a_1; a_2, \dots], \quad -\frac{1}{\eta_1} = \frac{1}{-\frac{1}{\eta_0} - [\theta_0]} = -[0; a_0, a_{-1}, \dots]$$

が得られる。したがって $\eta_1 = [a_0; a_{-1}, \dots]$ から $\delta_1 = a_0 = \varepsilon_0$ となり、 $Q_1 F_{\delta_1}^{-1} = Q_0 F_{\varepsilon_0} F_{\delta_1}^{-1} = Q_0$ が示された。 \square

上記の定理から、次の定義が well-defined となる。

定義 4.3.7. $Q_0 \in \mathcal{R}$ とする。2次形式の両側無限列

$$(\dots, Q_{-2}, Q_{-1}, Q_0, Q_1, Q_2, \dots)$$

を Q_{i+1} が Q_i の (一意的な) 右隣、 Q_{i-1} が Q_i の左隣になるように帰納的に定める。これを Q_0 の鎖とよぶ。

次は、 Q_0 の鎖に含まれる各 Q_i の根を記述するための系である。

系 4.3.8. $Q_0 \in \mathcal{R}$ に対して Q_0 の鎖 $(\dots, Q_{-2}, Q_{-1}, Q_0, Q_1, Q_2, \dots)$ を考える。 $Q_0(x, 1)$ の2つの根が $\theta_0, -\frac{1}{\eta_0}$ (ただし $\theta_0, \eta_0 > 1$) で与えられ、 $\theta_0 = [a_0; a_1, \dots], \eta_0 = [a_{-1}; a_{-2}, \dots]$ と無限連分数展開されるとする。このとき、 $i \in \mathbb{Z}$ に対して $Q_i(x, 1)$ の2つの根を $\theta_i, -\frac{1}{\eta_i}$ (ただし $\theta_i, \eta_i > 1$) とすると、

$$\theta_i = [a_i; a_{i+1}, \dots], \quad \eta_i = [a_{i-1}; a_{i-2}, \dots]$$

が成り立つ。

証明. 命題 4.3.6 の証明中で $i = \pm 1$ のときの記述が与えられている。それ以外の場合は同じ方法で帰納的に示される。 \square

次の命題には連分数理論の中にマルコフ定数の定義式の形が現れるので、連分数理論との関連性と証明の方向性がはっきりわかるようになるであろう。

命題 4.3.9. $Q_0 \in \mathcal{R}$ に対して $(\dots, Q_{-2}, Q_{-1}, Q_0, Q_1, Q_2, \dots)$ を Q_0 の鎖とし、 $(\theta_i, -\frac{1}{\eta_i})$ を $Q_i(x, 1)$ の根とする。ただし $\theta_i, \eta_i > 1$ とする。 $\theta_0 := [a_0; a_1, \dots], \eta_0 := [a_{-1}; a_{-2}, \dots]$ とすると、

$$[a_i; a_{i+1}, \dots] + [0; a_{i-1}, a_{i-2}, \dots] = \theta_i + \frac{1}{\eta_i} = \frac{\sqrt{D(Q_0)}}{|Q_i(1, 0)|}$$

が成り立つ。

証明. 最初の等式は系 4.3.8 から直ちに従う。後半の等式を示す。 $Q_i(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ であるとする。 $\theta_i, -\frac{1}{\eta_i}$ は $Q_i(x, 1) = ax^2 + bx + c$ の根であり、また $\theta_i > -\frac{1}{\eta_i}$ であるから $a > 0$ ならば

$$\theta_i = \frac{-b + \sqrt{D(Q_i)}}{2a}, \quad -\frac{1}{\eta_i} = \frac{-b - \sqrt{D(Q_i)}}{2a}$$

$a < 0$ ならば

$$\theta_i = \frac{-b - \sqrt{D(Q_i)}}{2a}, \quad -\frac{1}{\eta_i} = \frac{-b + \sqrt{D(Q_i)}}{2a}$$

である。したがって $a > 0$ のときは

$$\theta_i + \frac{1}{\eta_i} = \frac{\sqrt{D(Q_i)}}{a} = \frac{\sqrt{D(Q_i)}}{|a|}$$

が成り立ち、 $a < 0$ のときも

$$\theta_i + \frac{1}{\eta_i} = -\frac{\sqrt{D(Q_i)}}{a} = \frac{\sqrt{D(Q_i)}}{|a|}$$

が成り立つ。最後に $a = Q_i(1, 0)$ であり、また Q_0 と Q_i が同値であることから $\sqrt{D(Q_i)} = \sqrt{D(Q_0)}$ となり主張が従う。□

次の命題が定理 4.3.3 の証明のための最後の準備だが、この証明が非常に技巧的である。

命題 4.3.10. $Q_0 \in \mathcal{R}$ に対して、 $(\dots, Q_{-2}, Q_{-1}, Q_0, Q_1, Q_2, \dots)$ を Q_0 の鎖とする。このとき、

$$\inf_{h \in \mathbb{Z}} |Q_h(1, 0)| = \inf_{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}} |Q_0(x, y)| \quad (4.3.1)$$

が成り立つ。

証明. すべての $h \in \mathbb{Z}$ に対して Q_i と Q_0 は同値なので、

$$\inf_{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}} |Q_h(x, y)| = \inf_{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}} |Q_0(x, y)|$$

が成り立つ。下限の定義から

$$|Q_h(1, 0)| \geq \inf_{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}} |Q_h(x, y)|$$

なので、

$$\inf_{h \in \mathbb{Z}} |Q_h(1, 0)| \geq \inf_{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}} |Q_0(x, y)|$$

が成り立つことはよい。したがって、あとは

$$\inf_{h \in \mathbb{Z}} |Q_h(1, 0)| \leq \inf_{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}} |Q_0(x, y)| \quad (4.3.2)$$

をいけば十分。

まず、 $Q_0(x, 1)$ の 2 つの無理数根 $\theta_0, -\frac{1}{\eta_0}$ から定まる両側無限数列 $(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ が任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $a_i = 1$ であるような場合を考える。このとき、例 3.1.5(1) から $\theta_0 = \eta_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。 $Q(x, 1)$ が $(\theta, -\frac{1}{\eta})$ を根に持つ 2 次形式は

$$Q(x, y) = a(x - \theta y) \left(x + \frac{1}{\eta} y \right)$$

の形をしたものですべてであり、 Q を $a^{-1}Q$ に置き換えると両辺の下限がともに $|a|^{-1}$ 倍され、等式
の真偽は変わらないので、 $a = 1$ として

$$Q_0(x, y) = x^2 - xy - y^2$$

としてよい。ここで、例 4.1.5(1) から

$$\inf_{h \in \mathbb{Z}} |Q_h(1, 0)| = |Q_0(1, 0)| = 1 = \inf_{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}} |Q_0(x, y)|$$

が成り立つので特に (4.3.2) が成立する。

次にある $i \in \mathbb{Z}$ に対して $a_i \geq 2$ である場合を考える。適切に Q_0 のいくつか左隣もしくは右隣
をとって新しく Q_0 と置き直すことで、 $a_0 \geq 2$ としてよい。このとき $\theta_0 > 2$ である。示すべきは、
任意の $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対してある i が存在して $|Q_0(x, y)| \geq |Q_i(1, 0)|$ となることである。
 $|Q_0(x, y)| \geq |Q_0(1, 0)|$ なら $i = 0$ として終わりなので、 $|Q_0(x, y)| < |Q_0(1, 0)|$ を仮定する。この仮
定のもとでは $y = 0$ はありえない。なぜなら

$$|Q_0(x, 0)| = x^2 |Q_0(1, 0)| \geq |Q_0(1, 0)|$$

が成り立つからである。 $x = 0$ のときを考える。 Q_0 は Q_{-1} の右隣だから、

$$|Q_0(0, y)| = |Q_{-1} F_{\varepsilon_{-1}}(0, y)| = \left| Q_{-1} \begin{bmatrix} a_{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (0, y) \right| = |Q_{-1}(y, 0)| = y^2 |Q_{-1}(1, 0)| \geq |Q_{-1}(1, 0)|$$

であり、 $x = 0$ の場合は示された。以下、 $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ とする。

$$Q_0(x, y) = ay^2 \left(\frac{x}{y} - \theta_0 \right) \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{\eta_0} \right) \quad (4.3.3)$$

とする。まず $\frac{x}{y} > 0$ の場合を考える。 $Q(x, y) = Q(-x, -y)$ だから、 $x, y > 0$ としてよい。このと
き、実際は $\frac{x}{y} \geq 2$ であることを示す。 $\frac{x}{y} < 2$ を仮定すると $\theta_0 > 2$ の設定から $\frac{x}{y} < \theta_0$ である。した
がって、

$$|Q_0(x, y)| = |a|y^2 \left| \frac{x}{y} - \theta_0 \right| \left| \frac{x}{y} + \frac{1}{\eta_0} \right| > |a|y^2 \left(2 - \frac{x}{y} \right) \left| \frac{x}{y} \right| = |a|(2y - x)x \geq |a|$$

となるが、これは $|Q_0(x, y)| < |Q_0(1, 0)|$ に矛盾する。よって $\frac{x}{y} \geq 2$ である。ここで $|Q_0(x, y)| < |Q_0(1, 0)| = |a|$ の仮定と (4.3.3) を比較することで

$$2y^2 \left| \frac{x}{y} - \theta_0 \right| < y^2 \left| \frac{x}{y} - \theta_0 \right| \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{\eta_0} \right) < 1$$

が成り立つので、これを变形して

$$\left| \theta_0 - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{2y^2}$$

を得る。ここで $\frac{x}{y}$ を既約化して $\frac{p}{q}$ と書くと $q \leq y$ であり、上の不等式から $\left| \theta_0 - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2y^2} \leq \frac{1}{2q^2}$ で
ある。したがって定理 2.3.10 から、 $\frac{p}{q}$ は θ_0 の近似分数である。そこで $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_n] =: \frac{p_n}{q_n}$ と
すると

$$\begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix} = F_{a_0} F_{a_1} \cdots F_{a_n} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる。したがって、両辺 Q_0 を作用させることで

$$Q_0(p_n, q_n) = Q_{n+1}(1, 0)$$

を得る。ここで、 $\frac{p_n}{q_n}$ は既約であるからある $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を用いて $(x, y) = (dp_n, dq_n)$ とかけ、したがって

$$|Q_0(x, y)| = d^2 |Q_0(p_n, q_n)| \geq |Q_0(p_n, q_n)| = |Q_{n+1}(1, 0)|$$

が成り立つ。以上から $\frac{x}{y} > 0$ の場合について示された。次に $\frac{x}{y} < 0$ とする。必要なら (x, y) を $(-x, -y)$ に取り替えることで、 $y > 0$ としてよい。このとき $\left| \frac{x}{y} - \theta_0 \right| > 2$ なので、再び $|Q_0(x, y)| < |Q_0(1, 0)| = |a|$ の仮定と (4.3.3) を比較することで

$$2y^2 \left| \frac{x}{y} + \frac{1}{\eta_0} \right| < y^2 \left| \frac{x}{y} - \theta_0 \right| \left| \frac{x}{y} + \frac{1}{\eta_0} \right| < 1$$

が成り立つ。したがってこれを変形して

$$\left| \frac{x}{y} + \frac{1}{\eta_0} \right| < \frac{1}{2y^2}$$

を得る。 θ_0 のときの議論と同様に、 $-x/y$ を既約化した分数を p'/q' とすると $q' \leq y$ であり、 p'/q' は $\frac{1}{\eta_0}$ の近似分数であるから、 $p'/q' = [0; a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-m}]$ とする。右辺を $\frac{p'_m}{q'_m}$ と置くことにすると、このとき

$$\begin{bmatrix} p'_m & * \\ q'_m & * \end{bmatrix} = F_0 F_{a_{-1}} F_{a_{-2}} \cdots F_{a_{-m}}$$

と表される。この第1列を用いて、この行列を転置して逆行列をとることで

$$(-1)^{m+1} \begin{bmatrix} q'_m & * \\ -p'_m & * \end{bmatrix} = F_0^{-1} F_{a_{-1}}^{-1} F_{a_{-2}}^{-1} \cdots F_{a_{-m}}^{-1}$$

が成り立つ。ここで F_0^{-1} を移項して両辺 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ に作用させることで

$$(-1)^{m+1} \begin{bmatrix} -p'_m \\ q'_m \end{bmatrix} = F_{a_{-1}}^{-1} F_{a_{-2}}^{-1} \cdots F_{a_{-m}}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る。したがって両辺に Q_0 を作用させることで

$$Q_0((-1)^m p'_m, (-1)^{m+1} q'_m) = Q_{-m}(1, 0)$$

が成り立つ。ここで一般に $Q(a, -b) = Q(-a, b)$ が成り立つことを考えると、任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ で

$$Q_0(p'_m, -q'_m) = Q_0(-p'_m, q'_m) = Q_0((-1)^m p'_m, (-1)^{m+1} q'_m) = Q_{-m}(1, 0)$$

である。ここで $\frac{x}{y} = -\frac{p'_m}{q'_m}$ であり、 p'_m/q'_m は既約分数である。したがって、ある $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して $(x, y) = (-dp'_m, dq'_m)$ または $(x, y) = (dp'_m, -dq'_m)$ である。いずれの場合も

$$|Q_0(x, y)| = d^2 |Q_0(-p'_m, q'_m)| \geq |Q_0(-p'_m, q'_m)| = |Q_{-m}(1, 0)|$$

である。以上から示された。 □

いよいよ定理 4.3.3 を示す。ここまで準備をたくさんしてきたので、証明は一瞬で終わる。

定理 4.3.3 の証明. 示すべきは $Q = Q_0$ に対する

$$\sup_{h \in \mathbb{Z}} ([a_h; a_{h+1}, \dots] + [0; a_{h-1}, a_{h-2}, \dots]) = \frac{\sqrt{D(Q)}}{\inf_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |Q(x,y)|}$$

なので、命題 4.3.9 から

$$\frac{\sqrt{D(Q_0)}}{\inf_{h \in \mathbb{Z}} |Q_h(1,0)|} = \frac{\sqrt{D(Q_0)}}{\inf_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |Q_0(x,y)|}$$

を拡張実数の等式として示せばよい。両辺の分母がともに 0 である場合は、どちらも ∞ と読む。それ以外の場合も含めて、これは命題 4.3.10 からしたがう。□

最後に \mathcal{L} と \mathcal{M} の包含関係について触れてこの節を終えることにする。系 4.3.4 によると $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ であることが示されているが、これは真の包含関係であることが [Fre68] をはじめ様々な文献により証明されている。 \mathcal{L} に含まれず \mathcal{M} に含まれる具体的な値は現在も精力的に研究されており、例えば [LMMR20] に詳しい研究状況が書かれている。

4.4 有理数係数 2 次形式のマルコフ定数

この章の最後に、2 次形式 $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ の係数 a, b, c が有理数の場合の $\mathcal{M}(Q)$ の値について考察する。前節の議論からマルコフ定数は Q が標準簡約な場合について計算が可能であることがわかっている。まずは Q を $\mathcal{M}(Q) = \mathcal{M}(Q')$ であって標準簡約であるような Q' に取り替えたい。定理 4.2.5 によってその存在が保証されている（さらにその証明からそのような Q' を得るためのアルゴリズムもわかる）が、係数 a, b, c が有理数の場合は 2 次無理数の性質からもどのような 2 次形式 Q' に取り替えれば良いかがわかる。有理数係数の 2 次形式全体の集合を

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}} := \{Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \in \mathcal{Q} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

とする。

命題 4.4.1. $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \in \mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}$ とする。このとき $Q(x,1)$ は 2 つの 2 次無理数根をもつのでその一つを α とする。 α の無限連分数展開が

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n, \overline{b_0, \dots, b_{k-1}}]$$

であるとき、

$$\beta := [\overline{b_0, b_1, \dots, b_{k-1}}]$$

とおき、 β' を β の 2 次共役とする。このとき

$$Q'(x,y) := (x - \beta y)(x - \beta' y)$$

と定めると、

$$\mathcal{M}(Q) = \mathcal{M}(Q')$$

であり、さらに Q' は標準簡約である。

証明. α と β は定理 2.5.5 から同値なので、ある $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ が存在して $\beta = A\alpha$ とかける。このとき、2 次形式 QA^{-1} を考えると補題 4.2.6 より β を根にもつ。また $QA^{-1}(x, y)$ は有理数係数 2 次形式なので、 $QA^{-1}(x, 1)$ の根は β, β' である。したがって $QA^{-1}(x, y)$ はある $a' \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ をつかって

$$QA^{-1}(x, y) = a'(x - \beta y)(x - \beta' y)$$

となる。 β の簡約性から $\beta > 1, -1 < \beta' < 0$ だから QA^{-1} は標準簡約 2 次形式であり、系 4.3.1 から $\mathcal{M}(Q) = \mathcal{M}(QA^{-1})$ が成り立つ。また $Q' = \frac{1}{a'}QA^{-1}$ であり、2 次形式の標準簡約性は定数倍で保たれ、また $\mathcal{M}(Q') = \mathcal{M}(QA^{-1})$ であるから、 Q' は標準簡約 2 次形式であり $\mathcal{M}(Q') = \mathcal{M}(Q)$ である。□

命題 4.4.1 では $Q(x, 1)$ または $Q(1, y)$ の 2 つあるうちの 1 つの根から $\mathcal{M}(Q)$ の値が決まっているので、一瞬「マルコフ定数は 2 つの無理数根の情報から決まるものではないのか?」と思うかもしれないが、今回のケースでは 2 次形式は係数が有理数なので、 α が $Q(x, 1)$ の無理数根であるときは 2 次共役 α' がもう片方の根である。したがって、この状況下では実質的に 1 つの無理数からマルコフ定数が決まるのである。そしてこのケースでは、ラグランジュ定数とマルコフ定数の間に綺麗な対応関係が存在する。

定理 4.4.2. $Q \in \mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}$ とし、 $Q(x, 1) = 0$ の一方の根を 2 次無理数 α とする。このとき $\mathcal{M}(Q) = \mathcal{L}(\alpha)$ が成り立つ。

証明. α の無限連分数展開が $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n, \overline{b_0, \dots, b_{k-1}}]$ であるとき、 $\beta := [\overline{b_0, b_1, \dots, b_{k-1}}]$ として $Q'(x, y) = (x - \beta y)(x - \beta' y)$ とすると、命題 4.4.1 と定理 4.3.3 から循環節を左右両方向に繰り返し無限に伸ばした無限列

$$\mathbf{b} = (\dots, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, \dots)$$

に対して

$$\mathcal{M}(Q) = \mathcal{M}(Q') = \mathcal{S}(\mathbf{b})$$

が成立する。一方で命題 3.3.1 と定理 3.3.3 から

$$\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\beta) = \mathcal{S}(\mathbf{b})$$

である。したがって $\mathcal{M}(Q) = \mathcal{L}(\alpha)$ が成り立つ。□

これを踏まえて例 3.3.7 とパラレルな 2 次形式についてのマルコフ定数を計算してみよう。

例 4.4.3. 有理数係数 2 次形式 $Q(x, y) = x^2 - 2xy - 2y^2$ のマルコフ定数 $\mathcal{M}(Q)$ を計算する。まず $Q(x, 1) = x^2 - 2x - 2$ の根を求めると $x = 1 \pm \sqrt{3}$ である。よって $Q(x, 1)$ の 2 次無理数根の一つとして $\alpha = 1 + \sqrt{3}$ が取れる。例 3.3.7 で計算した通り、 $\alpha = [\overline{2, 1}]$ であり循環節は $(2, 1)$ 、周期の長さは $k = 2$ である。この循環節から定まる純周期連分数 $\beta = [\overline{2, 1}]$ を考えると、この場合 $\beta = \alpha$ であり、その 2 次共役は $\beta' = 1 - \sqrt{3}$ である。ここで $\beta > 1$ かつ $-1 < \beta' < 0$ が成り立つので、 Q は標準簡約 2 次形式である。命題 4.4.1 と定理 4.3.3 より、循環節 $(2, 1)$ を左右に無限に繰り返した無限列 $\mathbf{b} = (\dots, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots)$ に対して $\mathcal{M}(Q) = \mathcal{S}(\mathbf{b})$ が成り立つ。一方、前の例で示したように $\mathcal{L}(1 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ であり、定理 4.4.2 より $\mathcal{M}(Q) = \mathcal{L}(\alpha)$ なので $\mathcal{M}(Q) = 2\sqrt{3}$ を得る。

実は例 3.1.5 と例 4.1.5 も定理 4.4.2 で対応する例になっている。確認してみよう。

最後に、ここまでの議論で得られるマルコフスペクトラムとラグランジュスペクトラムの関係性を述べてこの章を締めることにしよう。系 4.3.4 から一般には $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ であり逆の包含が成り立たないことが知られているが、この2つの集合の適切な制限は全く同じ集合になる。

系 4.4.4. $\mathcal{L}_2, \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}, \mathcal{S}_{\text{period}}$ を

$$\mathcal{L}_2 := \{\mathcal{L}(\alpha) \mid \alpha \in I_2\}, \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} := \{\mathcal{M}(Q) \mid Q \in \mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}\}, \mathcal{S}_{\text{period}} := \{\mathcal{S}(\mathbf{b}) \mid \mathbf{b} \text{ は循環両側無限列}\}$$

とすると、 $\mathcal{L}_2 = \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{S}_{\text{period}}$ である。

証明. 系 3.3.4 と定理 4.4.2 からしたがう。 □

次の章からは、 \mathcal{L}_2 や $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ の値の中で特別な記述方法を持つ値について扱う。

第II部

一般化マルコフ数

第 5 章

一般化マルコフ方程式と 一般化マルコフ数

この章では、第 II 部の出発点として一般化マルコフ方程式と一般化マルコフ数を導入する。第 4 章までに見たラグランジュスペクトラムとマルコフスペクトラムの理論に対し、本章ではその離散的部分を記述する新たな数論的対象を用意することが目的である。まず一般化マルコフ方程式の定義と基本性質を述べ、ついで一般化マルコフ木を構成して解の全体像を整理する。さらにファレイ木との対応を通じて分数ラベルを導入し、最後に特性数を定義して、後に一般化コーン行列や一般化離散マルコフスペクトラムを記述するための準備を行う。

この節の内容は筆者と共同研究者たちの論文 [GM23b, GM23a, GMS24, BG25] に基づいているが、[GM23a, GMS24] は $k_1 = k_2 = k_3$ のケースに対してのみ証明を与えているので、これを一般の形に書き改めた。また [BG25] はより一般的な団代数理論の枠組みで議論を展開しているが、これを整数論の枠組みを出ないように適切に特殊化して議論を行っている。

5.1 定義と基本性質

定義 5.1.1. $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、 (k_1, k_2, k_3) 一般化マルコフ方程式を

$$x^2 + y^2 + z^2 + k_1yz + k_2zx + k_3xy = (3 + k_1 + k_2 + k_3)xyz \quad (5.1.1)$$

で定める。さらにこの方程式の (x, y, z) に関する正の整数解の順列を (k_1, k_2, k_3) 一般化マルコフトリプルと呼び、 (k_1, k_2, k_3) 一般化マルコフトリプルに現れる正の整数を (k_1, k_2, k_3) 一般化マルコフ数と呼ぶ。 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ のときは単にマルコフトリプル、マルコフ数と呼ぶ。

これらの名称は長いので、これ以降「一般化マルコフ」は英語名である「Generalized Markov」の頭文字をとって「GM」と表記することにする。1 点注意すべきなのは、 (k_1, k_2, k_3) -GM トリプルは (k_1, k_2, k_3) -GM 方程式の正整数解だけでなく、その順番違いも含むということである。 $k_1 = k_2 = k_3$ のときは (k_1, k_2, k_3) -GM 方程式は 3 つの文字 x, y, z に関して対称な方程式なので (a, b, c) が正整数解であればその順列もすべて正整数解なのでこの 2 つの概念に差はないが、そうでないときは (a, b, c) が正整数解であってもその順列は正整数解ではないことがある。

まずは GM 方程式の正整数解（GM トリプルではないので、3 つの成分の順序は考慮されていることに注意）についての基本的な性質から紹介していくことにしよう。最初に紹介するのは、この方

程式の正整数解を全列挙するアルゴリズムである。以下の手順により、正の整数の三つ組を頂点にもつ木 $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ を定義する。

- (1) 最初の頂点を $(1, 1, 1)$ とする。
- (2) 三つ組 $(1, 1, 1)$ は、3つの子 $(k_1 + 2, 1, 1)$ 、 $(1, k_2 + 2, 1)$ 、 $(1, 1, k_3 + 2)$ をもつ。
- (3) $(k_1 + 2, 1, 1)$ 、 $(1, k_2 + 2, 1)$ 、 $(1, 1, k_3 + 2)$ 以降の世代規則を次のように定める：
 - (i) (a, b, c) において a が最大の成分であるとき、 (a, b, c) は次の2つの子をもつ：

$$\left(a, \frac{a^2 + k_2 ac + c^2}{b}, c \right), \quad \left(a, b, \frac{a^2 + k_3 ab + b^2}{c} \right).$$

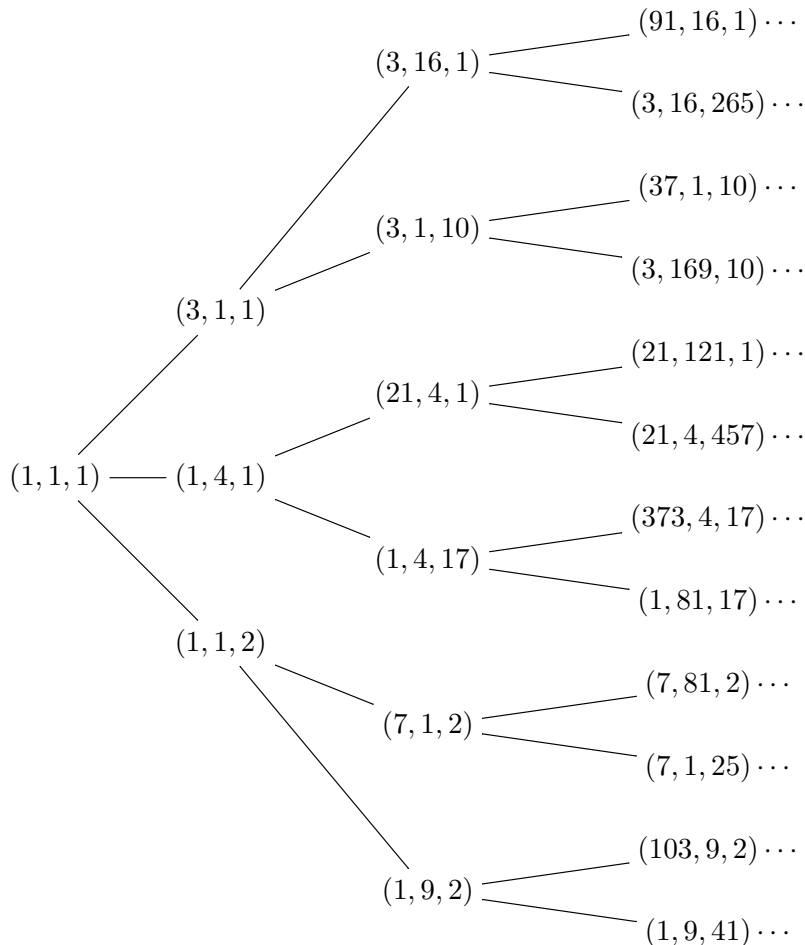
- (ii) (a, b, c) において b が最大の成分であるとき、 (a, b, c) は次の2つの子をもつ：

$$\left(\frac{b^2 + k_1 bc + c^2}{a}, b, c \right), \quad \left(a, b, \frac{a^2 + k_3 ab + b^2}{c} \right).$$

- (iii) (a, b, c) において c が最大の成分であるとき、 (a, b, c) は次の2つの子をもつ：

$$\left(\frac{b^2 + k_1 bc + c^2}{a}, b, c \right), \quad \left(a, \frac{a^2 + k_2 ac + c^2}{b}, c \right).$$

例 5.1.2. $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 0$ の場合、 $\mathbb{T}(1, 2, 0)$ の最初のいくつかの項は次の通りである：



このとき次が成り立つ。

定理 5.1.3. (k_1, k_2, k_3) -GM 方程式の任意の正整数解は、 $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ の中にちょうど一度ずつ現れる。

この定理を証明するために準備をしていこう。以下の命題から議論を始める。

命題 5.1.4. $(x, y, z) = (a, b, c)$ が (5.1.1) の正の整数解であるとする。このとき

$$\left(\frac{b^2 + k_1bc + c^2}{a}, b, c \right), \quad \left(a, \frac{a^2 + k_2ac + c^2}{b}, c \right), \quad \left(a, b, \frac{a^2 + k_3ab + b^2}{c} \right)$$

もまた (5.1.1) の正の整数解である。

証明. $\left(\frac{b^2 + k_1bc + c^2}{a}, b, c \right)$ の場合のみを示せば十分である。正であることは明らかなので、これが (5.1.1) の整数解であることを示す。 (a, b, c) が (5.1.1) の解であることから、

$$\frac{b^2 + k_1bc + c^2}{a} = (3 + k_1 + k_2 + k_3)bc - a - k_3b - k_2c$$

が成り立つ。したがって、 $\left(\frac{b^2 + k_1bc + c^2}{a}, b, c \right)$ は整数の三つ組である。以下の計算を見やすくするため、

$$A := (3 + k_1 + k_2 + k_3)bc - a - k_3b - k_2c$$

とおく。 (A, b, c) が (5.1.1) の解であることを示す。

a と A の和と積はそれぞれ

$$\begin{aligned} a + A &= (3 + k_1 + k_2 + k_3)bc - k_3b - k_2c, \\ a \cdot A &= b^2 + k_1bc + c^2 \end{aligned}$$

である。解と係数の関係から a と A は次の二次方程式の解である。

$$X^2 - \{(3 + k_1 + k_2 + k_3)bc - k_3b - k_2c\}X + b^2 + k_1bc + c^2 = 0$$

ここで $X = A$ を代入して整理すると、

$$A^2 + b^2 + c^2 + k_3Ab + k_1bc + k_2cA = (3 + k_1 + k_2 + k_3)Abc$$

を得る。これは $(x, y, z) = (A, b, c)$ を (5.1.1) に代入した式である。□

さて、対応

$$\begin{aligned} (a, b, c) &\mapsto \left(\frac{b^2 + k_1bc + c^2}{a}, b, c \right), \\ (a, b, c) &\mapsto \left(a, \frac{a^2 + k_2ac + c^2}{b}, c \right), \\ (a, b, c) &\mapsto \left(a, b, \frac{a^2 + k_3ab + b^2}{c} \right) \end{aligned}$$

をそれぞれ第 1, 2, 3 ヴィエタ跳躍と呼ぶことにする。これらのヴィエタ跳躍はいずれも対合（同じ操作で元に戻ってくる）である。次に同じ数を 2 つ以上含む解を決定する。

補題 5.1.5. (5.1.1) の正の整数解のうち、同じ数を含むものは

$$(1, 1, 1), (k_1 + 2, 1, 1), (1, k_2 + 2, 1), (1, 1, k_3 + 2)$$

に限られる。

証明. (a, b, c) を (5.1.1) の正の整数解で、同じ数を含むものとする。 $a = b$ の場合のみを示す。
 $(x, y, z) = (a, a, c)$ を (5.1.1) に代入すると、

$$(2 + k_3)a^2 + c^2 + (k_1 + k_2)ac = (3 + k_1 + k_2 + k_3)a^2c$$

を得る。よって、

$$c = \frac{a^2k_3 + a^2k_1 + a^2k_2 + 3a^2 - ak_1 - ak_2 \pm a\sqrt{(ak_3 + (a-1)k_1 + (a-1)k_2 + 3a)^2 - 4(k_3 + 2)}}{2}$$

となる。

$$k := ak_3 + (a-1)k_1 + (a-1)k_2 + 3a > 0$$

とおく。 c が整数であるためには平方根の中身が平方数でなければならない。よって、ある正の整数 l が存在して $l^2 = k^2 - 4(k_3 + 2)$ が成り立つ。 $a \geq 1$ より $k \geq k_3 + 3$ であるから $k + l > k_3 + 2$ である。 $(k+l)(k-l) = 4(k_3 + 2)$ より、 $1 \leq k-l \leq 3$ が成り立ち、

$$(k-l, k+l) = (1, 4(k_3 + 2)), (2, 2(k_3 + 2)), \left(3, \frac{4(k_3 + 2)}{3}\right)$$

のいずれかである。 $k = \frac{(k+l)+(k-l)}{2}$ が整数である必要があるため、前後の 2 つは不可能である。
 $(k-l, k+l) = (2, 2(k_3 + 2))$ のとき、 $k = k_3 + 3$, $l = k_3 + 1$ となり、 $(a, a, c) = (1, 1, 1)$ または $(1, 1, k_3 + 2)$ を得る。 $a = c$, $b = c$ の場合も同様に示される。 \square

ここからは、4つの三つ組

$$(1, 1, 1), (k_1 + 2, 1, 1), (1, k_2 + 2, 1), (1, 1, k_3 + 2)$$

を特異であると呼び、それ以外の (5.1.1) の正の整数解を非特異であると呼ぶことにする。

命題 5.1.6. $(x, y, z) = (a, b, c)$ を (5.1.1) の非特異な正の整数解とし、 $a > b > c$ を仮定する。このとき次が成り立つ。

$$(1) \frac{a^2 + k_2ac + c^2}{b} > a (> c), \quad (2) \frac{a^2 + k_3ab + b^2}{c} > a (> b), \quad (3) b > \frac{b^2 + k_1bc + c^2}{a}.$$

証明. (1) を示す。

$$\frac{a^2 + k_2ac + c^2}{b} - a = \frac{a^2 + k_2ac + c^2 - ab}{b} > \frac{a^2 + k_2ac + c^2 - a^2}{b} = \frac{c^2 + k_2ac}{b} > 0$$

より結論を得る。(2) も同様に示される。以下では (3) を示す。

$$\begin{aligned} f(x) &:= (x-a) \left(x - \frac{b^2 + k_1bc + c^2}{a} \right) \\ &= x^2 - ((3 + k_1 + k_2 + k_3)bc - k_3b - k_2c)x + (b^2 + c^2 + k_1bc) \end{aligned}$$

とおく。 $f(b) < 0$ を示せば十分である。すなわち、

$$f(b) = (2 + k_3)b^2 - (3 + k_1 + k_2 + k_3)b^2c + (k_1 + k_2)bc + c^2 < 0$$

を示す。 \mathbb{R}^2 上の関数

$$g(y, z) = (2 + k_3)y^2 - (3 + k_1 + k_2 + k_3)y^2z + (k_1 + k_2)yz + z^2 \quad (5.1.2)$$

を考えると、 $g(b, c) = f(b)$ である。 y 方向の偏微分を計算すると、

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2(2 + k_3)y - 2(3 + k_1 + k_2 + k_3)yz + (k_1 + k_2)z$$

である。 $y > z \geq 1$ のもとでは、

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) &< 2(2 + k_3)y - 2(3 + k_1 + k_2 + k_3)yz + (k_1 + k_2)y \\ &= -y((6z - 4) + k_3(2z - 2) + k_1(2z - 1) + k_2(2z - 1)) \\ &< -((6z - 4) + k_3(2z - 2) + k_1(2z - 1) + k_2(2z - 1)) < 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。同様に z 方向の偏微分は

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -(3 + k_1 + k_2 + k_3)y^2 + (k_1 + k_2)y + 2z$$

であり、 $y > z \geq 1$ のもとで

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial z}(y, z) &< -(3 + k_1 + k_2 + k_3)y^2 + (k_1 + k_2)y + 2y \\ &< -(3 + k_1 + k_2 + k_3)y^2 + (k_1 + k_2)y^2 + 2y^2 \\ &= -y^2(1 + k_3) < 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $y > z \geq 1$ の領域において $g(y, z)$ は y, z の両方向に単調減少である。いま $(1, 1)$ から (b, c) へ、まず $z = 1$ のまま y を 1 から b まで増加させ、次に $y = b$ のまま z を 1 から c まで増加させる経路を考える。この経路上で上の単調性を適用すると、 $g(1, 1) = 0$ であるから、 $g(b, c) = f(b) < 0$ が従う。 \square

命題 5.1.6 では $a > b > c$ を仮定したが、この仮定は本質的ではない。

系 5.1.7. $(x, y, z) = (a, b, c)$ を (5.1.1) の非特異な正の整数解とする。 (a', b, c) (それぞれ (a, b', c) 、 (a, b, c')) を第 1 (それぞれ第 2、第 3) ヴィエタ跳躍とする。

- (1) (a, b, c) において a が最大であるとき、 (a', b, c) では a' は最大ではなく、 (a, b', c) では b' が最大であり、 (a, b, c') では c' が最大である。
- (2) (a, b, c) において b が最大であるとき、 (a', b, c) では a' が最大であり、 (a, b', c) では b' は最大ではなく、 (a, b, c') では c' が最大である。
- (3) (a, b, c) において c が最大であるとき、 (a', b, c) では a' が最大であり、 (a, b', c) では b' が最大であり、 (a, b, c') では c' は最大ではない。

証明. $a > b > c$ の場合は命題 5.1.6 で示されている。他の場合も、最大成分がどの変数であるかに応じて同じ単調性計算を行うことで示される。ただし一般の (k_1, k_2, k_3) では方程式が変数の置換に関して対称ではないため、単に変数を入れ替えるのではなく、それぞれの位置に対応する係数を保ったまま計算する。すなわち最大成分が b または c である場合にも、対応する 2 次式をその変数について見て、もう一方の根が 0 と最大成分の間に入ることを偏微分と判別式の計算から確認する。この確認は上の $a > b > c$ の場合と同じ形で行われるので、結論が従う。 \square

注 5.1.8. 系 5.1.7 と $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ の世代規則から、 $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ に属する非特異な三つ組 (a, b, c) について次が成り立つことがわかる。

- (i) (a, b, c) において a が最大であるとき、 (a, b, c) の親は $\left(\frac{b^2 + k_1bc + c^2}{a}, b, c\right)$ である。
- (ii) (a, b, c) において b が最大であるとき、 (a, b, c) の親は $\left(a, \frac{a^2 + k_2ac + c^2}{b}, c\right)$ である。
- (iii) (a, b, c) において c が最大であるとき、 (a, b, c) の親は $\left(a, b, \frac{a^2 + k_3ab + b^2}{c}\right)$ である。

さらに、 $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ における任意の非特異な三つ組は、その子よりも小さい最大成分をもつ。したがって、特異な三つ組は非特異な三つ組の子になることはない。よって、各特異な三つ組は $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ にちょうど一度ずつ現れる。また、上記 (i)、(ii)、(iii) の事実は $(1, 1, 1)$ を除く特異な三つ組についても成り立つ。

以上より、 $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ において、各頂点 (a, b, c) に隣接する 3 つの頂点は、それぞれ (a, b, c) の a, b, c のいずれか 1 つを別の数に置き換えたものである。

さて、定理 5.1.3 を示そう。

定理 5.1.3 の証明. 命題 5.1.4 と $(1, 1, 1)$ が (5.1.1) の正の整数解であることより、 $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ のすべての頂点は (5.1.1) の正の整数解である。木の頂点に属する三つ組以外に正整数解が存在しないことを示す。 $(x, y, z) = (a, b, c)$ を (5.1.1) の非特異な正の整数解とする。系 5.1.7 より、 (a, b, c) のヴィエタ跳躍のうち、最大成分が (a, b, c) より小さくなるものが必ず存在する (かつ一意である)。この操作は解が非特異である限り繰り返すことができる。操作の途中で現れる解はすべて正の整数解であるから、有限回の操作の後に特異な解に到達する。補題 5.1.5 より、非特異な解が特異な解に移るとき、その特異な解は $(k_1 + 2, 1, 1)$ 、 $(1, k_2 + 2, 1)$ 、 $(1, 1, k_3 + 2)$ のいずれかである。注意 5.1.8 より、 $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ に属する三つ組の任意のヴィエタ跳躍は再び $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ に属する。したがって、上記の操作を逆に辿ることにより、 (a, b, c) は $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ の頂点として現れる。

一意性を示す。木の最初の頂点に近づく方向のヴィエタ跳躍が第 1、第 2、第 3 跳躍のどれであるかということは、 (a, b, c) の値の大小関係のみから決定することができる。したがって、 (a, b, c) から $(1, 1, 1)$ への遡り方は (a, b, c) が木のどの位置にあるかということには依存しないことになり、仮に (a, b, c) が複数箇所に現れている場合、 $(1, 1, 1)$ が複数箇所に現れることになる。これは注 5.1.8 に矛盾する。 \square

定理 5.1.3 からわかる重要な系を 1 つ挙げておこう。

系 5.1.9. (5.1.1) の任意の正整数解 (a, b, c) に対して、 a, b, c の任意の 2 つは互いに素である。

証明. $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ の場合には主張は明らかである。以下では、 a と b が互いに素であることの

みを示す。(5.1.1)を

$$z^2 = (3 + k_1 + k_2 + k_3)xyz - x^2 - y^2 - k_1yz - k_2zx - k_3xy$$

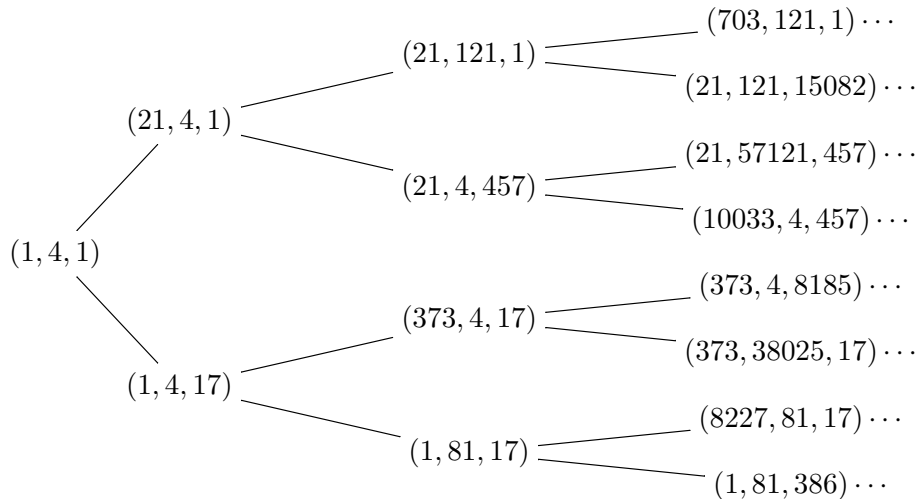
と変形し、 $(x, y, z) = (a, b, c)$ を代入する。もし a, b が $d \neq 1$ なる公約数をもつとすると、 d のある素因数 d' によって c も割り切れることがわかる。したがって、 d' は a, b, c の共通の約数である。このとき、命題5.1.4より、 $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ 上で (a, b, c) に隣接し、かつ最大成分が $\max\{a, b, c\}$ より小さい三つ組 (a', b', c') も共通の約数 d' をもつ。この操作を繰り返すことにより、 d' は最終的に $(1, 1, 1)$ の共通の約数であることが従う。しかしこれは $d' = 1$ でなければならず、矛盾である。よって $d = 1$ が成り立ち、 a と b は互いに素である。□

5.2 一般化マルコフ木

$\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ は (k_1, k_2, k_3) -GM方程式の正整数解を全列挙するという観点では無駄のない構造ではあるが、後に出てくる行列理論との対応関係を考えると、この木をいくつかの二分木に分割した方が都合が良いことが多い。そこで我々は新たな二分木を導入する。

定義 5.2.1. $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ の充満部分木であって最初の頂点がそれぞれ $(k_1 + 2, 1, 1)$, $(1, k_2 + 2, 1)$, $(1, 1, k_3 + 2)$ であるものを $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ の**第1, 第2, 第3分枝**と呼び、 $\mathbb{T}_1(k_1, k_2, k_3)$, $\mathbb{T}_2(k_1, k_2, k_3)$, $\mathbb{T}_3(k_1, k_2, k_3)$ と表す。

例 5.2.2. $\mathbb{T}_2(1, 2, 0)$ の最初のいくつかの頂点は次の通りである：



$\mathbb{T}_i(k_1, k_2, k_3)$ はその定義から完全二分木である。ただ実際にこの後の理論で使用されるのは、上記の二分木の各頂点の成分を、ヴィエタ跳躍で入れ替わった成分が中央に来るようにローテーションした次の完全二分木である（上記の分枝はこれから定義される二分木の頂点が正整数解を全列挙していることを示すために使われる）。

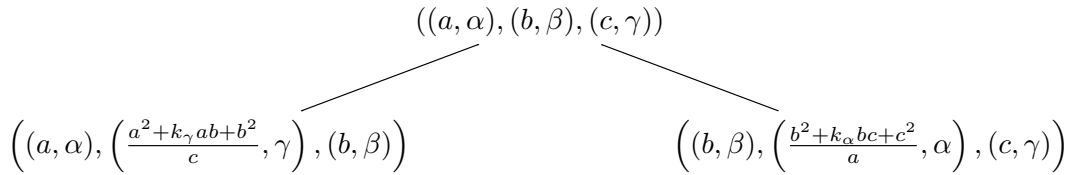
定義 5.2.3. \mathfrak{S}_3 を3次対称群とし、 $\{1, 2, 3\}$ への左作用を考える。 $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に対し、 (k_1, k_2, k_3, σ) **一般化マルコフ木**（以下、**GM木**） $M\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ を次のように定義する。

(1) 最初の頂点を

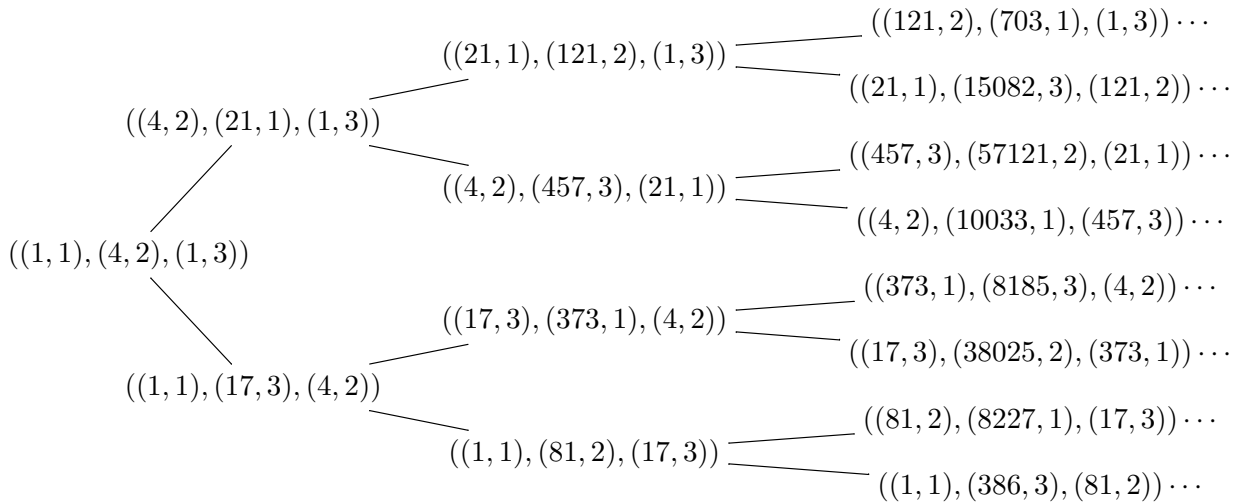
$$((1, \sigma(1)), (k_{\sigma(2)} + 2, \sigma(2)), (1, \sigma(3)))$$

とする。

- (2) 任意の頂点 $((a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma))$ に対して、次の 2 つの子を定める (左の子、右の子を区別する) :



例 5.2.4. $\text{MT}(1, 2, 0, \text{id})$ の最初のいくつかの頂点は次の通りである :



この木の各頂点は 3 つのペアの合計 6 成分で構成されているが、各ペアの第 1 成分が GM 数を与えており、それぞれの第 2 成分は第 1 成分の GM 数が本来の正整数解においてはどの位置に現れるかという位置情報である。 (k_1, k_2, k_3) -GM 方程式は x, y, z に対して非対称な方程式なのでどの整数が x, y, z それぞれに対応するかは重要な情報であるが、世代が進むたびに成分がローテーションするこの木では、この位置情報を GM 数とは別に記憶しておかなければいけないのである。 (k_1, k_2, k_3) -GM 数とその位置情報のペアを、これ以降は (k_1, k_2, k_3) -GM ペアと呼ぶことにする。

これ以降、 $((a, h), (b, i), (c, j)) \in \text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ の第 (n, m) 成分といたら n 番目のペアの第 m 成分を指すことにする。

さて、 $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ が $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ の分枝とローテーションの差を除いて同じ木であることを示そう。これを示すためにまず、完全二分木の同型を導入する。

定義 5.2.5. 集合 A, B を完全二分木とみなす。すなわち、それぞれの集合の元が完全二分木の各頂点に対応しているとする。全単射 $f: A \rightarrow B$ が親子関係を保存するとき、 f を **完全二分木同型** という。さらに、 A, B が順序付き完全二分木 (任意の頂点の 2 つの子に対して左右の区別を持っている完全二分木) であり、二分木同型 f が各頂点において左の子と右の子の対応も保存する場合、 f を **順序付き完全二分木同型** という。

$\mathbb{T}_i(k_1, k_2, k_3)$ は順序がついていない完全二分木、 $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ は順序付きの完全二分木であることに注意せよ。以下、 $\mathbb{T}_i(k_1, k_2, k_3)$ と $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ の (順序付きでない) 完全二分木同型を定める全単射を構成する。

$\tau \in \mathfrak{S}_3$ に対して、 $\tau(a, b, c)$ を (a, b, c) を並べ替えて a が $\tau(1)$ 番目の成分、 b が $\tau(2)$ 番目の成分、 c が $\tau(3)$ 番目の成分となるようにした三つ組と定める。木 \mathbb{T} が与えられたとき、 $V(\mathbb{T})$ でその頂点集合を表す。写像

$$\pi_\sigma : V(\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)) \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}^3$$

を以下のように定義する。

- 最初の頂点について

$$\pi_\sigma((1, \sigma(1)), (k_{\sigma(2)} + 2, \sigma(2)), (1, \sigma(3))) = {}^\sigma(1, k_{\sigma(2)} + 2, 1).$$

- $\pi_\sigma((a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma)) = {}^\tau(a, b, c)$ であるとき、

$$\begin{aligned} \pi_\sigma \left((a, \alpha), \left(\frac{a^2 + k_\gamma ab + b^2}{c}, \gamma \right), (b, \beta) \right) &= {}^{\tau \circ (2\ 3)} \left(a, \frac{a^2 + k_\gamma ab + b^2}{c}, b \right), \\ \pi_\sigma \left((b, \beta), \left(\frac{b^2 + k_\alpha bc + c^2}{a}, \alpha \right), (c, \gamma) \right) &= {}^{\tau \circ (1\ 2)} \left(b, \frac{b^2 + k_\alpha bc + c^2}{a}, c \right). \end{aligned}$$

命題 5.2.6. 写像 π_σ は、次の完全二分木同型を誘導する。

$$\begin{aligned} \pi_{(1\ 2)} : \text{MT}(k_1, k_2, k_3, (1\ 2)) &\simeq \mathbb{T}_1(k_1, k_2, k_3), \\ \pi_{(1\ 3\ 2)} : \text{MT}(k_1, k_2, k_3, (1\ 3\ 2)) &\simeq \mathbb{T}_1(k_1, k_2, k_3), \\ \pi_{\text{id}} : \text{MT}(k_1, k_2, k_3, \text{id}) &\simeq \mathbb{T}_2(k_1, k_2, k_3), \\ \pi_{(1\ 3)} : \text{MT}(k_1, k_2, k_3, (1\ 3)) &\simeq \mathbb{T}_2(k_1, k_2, k_3), \\ \pi_{(2\ 3)} : \text{MT}(k_1, k_2, k_3, (2\ 3)) &\simeq \mathbb{T}_3(k_1, k_2, k_3), \\ \pi_{(1\ 2\ 3)} : \text{MT}(k_1, k_2, k_3, (1\ 2\ 3)) &\simeq \mathbb{T}_3(k_1, k_2, k_3). \end{aligned}$$

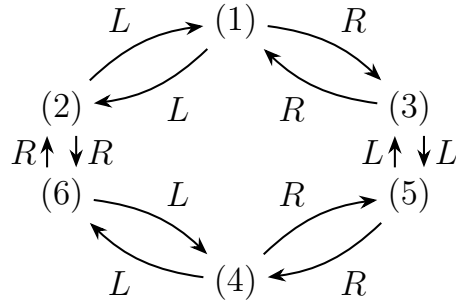
証明. $\pi_{(1\ 2)} : \text{MT}(k_1, k_2, k_3, (1\ 2)) \simeq \mathbb{T}_1(k_1, k_2, k_3)$ のみを示す (他も同様)。 $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, (1\ 2))$ の頂点 $((a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma))$ を固定し、 $\pi_{(1\ 2)}$ がこれを (a, b, c) に写すと仮定する (すなわち、ここでは π の定義における τ は恒等置換である)。このとき、 $\pi_{(1\ 2)}$ の定義より

$$\begin{aligned} \pi_{(1\ 2)} \left((a, \alpha), \left(\frac{a^2 + k_\gamma ab + b^2}{c}, \gamma \right), (b, \beta) \right) &= \left(a, b, \frac{a^2 + k_\gamma ab + b^2}{c} \right), \\ \pi_{(1\ 2)} \left((b, \beta), \left(\frac{b^2 + k_\alpha bc + c^2}{a}, \alpha \right), (c, \gamma) \right) &= \left(\frac{b^2 + k_\alpha bc + c^2}{a}, b, c \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、あとは τ が恒等置換の場合に $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3)$ かつ (a, b, c) のうち b が最大であることがわかれば、 $\mathbb{T}(k_1, k_2, k_3)$ の世代規則から $\pi_{(1\ 2)}$ を作用させる操作と子を取る操作が可換になり、1つ下の世代同士が $\pi_{(1\ 2)}$ で対応することがわかる。同様の議論を τ が恒等置換でない場合についても行うことで、次の対応を示せば良いことがわかる。

状態名	π_σ の定義における τ	(α, β, γ)	${}^\tau(a, b, c)$ の中で最大の成分
(1)	id	(1, 2, 3)	第2成分
(2)	(2 3)	(1, 3, 2)	第3成分
(3)	(1 2)	(2, 1, 3)	第1成分
(4)	(1 3)	(3, 2, 1)	第2成分
(5)	(1 2 3)	(2, 3, 1)	第3成分
(6)	(1 3 2)	(3, 1, 2)	第1成分

なお、この対応は $\sigma = (1\ 2)$ に限らず任意の σ で考えて良い。さてこの中のどれか1つが正しいと仮定すると、 π_σ の定義と系 5.1.7 から次の図式が成り立つことが直接計算によって示される。



ただし図中の矢は $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, (1\ 2))$ において子を取る操作であり、 L は左の子をとることを意味している。したがって、あとは $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, (1\ 2))$ の最初の頂点が (3) を満たしていることを示せば十分である。これは直接計算することで確かめられる。以上から示された。□

注 5.2.7. 同型 π は子に関する左右の区別を定めていないので、任意の σ に対し、 $\sigma^* := \sigma \circ (1\ 3)$ とすると $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ と $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma^*)$ は π によって同じ $\mathbb{T}_i(k_1, k_2, k_3)$ に移される。

系 5.2.8. $v = ((a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma)) \in \text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ に対して、 $\pi_\sigma(v) = {}^T(a, b, c)$ であるとする。このとき、 $b > \max\{a, c\}$ かつ $\alpha = \tau(1), \beta = \tau(2), \gamma = \tau(3)$ が成立する。

証明. $v = ((a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma)) \in \text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ に対して $\pi_\sigma(v) = {}^T(a, b, c)$ であるとする。このとき命題 5.2.6 の証明中にある (1)~(6) の状況のいずれかになる。各場合についてすべて確認することで主張を得る。□

系 5.2.9. 頂点集合

$$V_{(k_1, k_2, k_3)} := \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} V(\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma))$$

を考える。任意の $v \in V_{(k_1, k_2, k_3)}$ に対して v が現れる位置は木の和集合 $\bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ のなかで一意的である。

証明. まず、 $v = ((a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma)) \in V_{(k_1, k_2, k_3)}$ に対して v が属する木 $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ の中で v と同じ表示をもつ頂点が複数回現れることはあり得ない (命題 5.2.6 の全単射性に反する)。 v が2つの木 $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma), \text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma')$ に現れないことを示す。 v が最初の頂点かどうか、最初の頂点でないならば v がその親の左の子なのか右の子なのか、ということは v 自身の情報のみから決定される。実際、 $a = c$ ならば特異解に対応するトリプルなので最初の頂点である (系 5.2.8 から $a = b$ または $b = c$ とはならないことに注意せよ)。また $a \neq c$ のときは最初の頂点ではないので親が存在する。このとき、 v が親の左の子である場合と右の子である場合で、親の3つ組はそれぞれ

$$\left((a, \alpha), (c, \gamma), \left(\frac{a^2 + k_\beta ac + c^2}{b}, \beta \right) \right), \quad \left(\left(\frac{a^2 + k_\beta ac + c^2}{b}, \beta \right), (a, \alpha), (c, \gamma) \right)$$

のどちらかであるが、系 5.2.8 から (1, 1), (2, 1), (3, 1) 成分のなかで (2, 1) 成分が真に大きいので、 $a < c$ ならば親は前者、 $a > c$ ならば親は後者と一意に決まる。このことから最初の頂点までの経路も v のみから一意的に決定されることがわかり、また最初の頂点の表示も一意に決まることがわ

かる。したがって v が異なる木 $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ と $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma')$ に含まれることはあり得ない。□

次の定理により、 $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ は第 2 成分が最大であるような GM トリプルを全列挙しているといえる。

定理 5.2.10. (k_1, k_2, k_3) -GM トリプル (a, b, c) を $b > \max\{a, c\}$ を満たすものとし、 $\tau \in \mathfrak{S}_3$ に対して ${}^\tau(a, b, c)$ が (k_1, k_2, k_3) -GM 方程式の解であると仮定する。このとき、 $\{\sigma, \sigma^*\} \subset \mathfrak{S}_3$ の一意な組と、頂点の一意な組 $\{v, v^*\}$ が存在して $v \in \text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$, $v^* \in \text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma^*)$ を満たし、

$$v = ((a, \tau(1)), (b, \tau(2)), (c, \tau(3))), \quad v^* = ((c, \tau(3)), (b, \tau(2)), (a, \tau(1)))$$

となる。加えて、 $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma^*)$ における v^* の位置は、 $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ における v の位置と、中心に関して対称な位置にある。

証明. ${}^\tau(a, b, c) \neq (1, 1, 1)$ なので、 ${}^\tau(a, b, c)$ は定理 5.1.3 から $\mathbb{T}_1(k_1, k_2, k_3)$, $\mathbb{T}_2(k_1, k_2, k_3)$, $\mathbb{T}_3(k_1, k_2, k_3)$ のいずれかに属する。ここで ${}^\tau(a, b, c)$ が $\mathbb{T}_1(k_1, k_2, k_3)$ に属していると仮定する（ほかの場合も以下同様の議論となる）。このとき、命題 5.2.6 から $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, (1\ 2))$ の頂点 v_1 であって $\pi_{(1\ 2)}(v_1) = {}^\tau(a, b, c)$, $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, (1\ 3\ 2))$ の頂点 v_2 であって $\pi_{(1\ 3\ 2)}(v_2) = {}^\tau(a, b, c)$ を満たすものが一意に存在する。ここで ${}^\tau(a, b, c)$ は

$${}^\tau(a, b, c), \quad {}^{\tau \circ (1\ 3)}(c, b, a), \quad {}^{\tau \circ (1\ 2)}(b, a, c), \quad {}^{\tau \circ (2\ 3)}(a, c, b), \quad {}^{\tau \circ (1\ 2\ 3)}(b, c, a), \quad {}^{\tau \circ (1\ 3\ 2)}(c, a, b)$$

の表示を持つが、仮定から $b > \max\{a, c\}$ なので系 5.2.8 より次の 2 つのケースが考えられる：

- (1) $v_1 = ((a, \tau(1)), (b, \tau(2)), (c, \tau(3)))$, $\pi_{(1\ 2)}(v_1) = {}^\tau(a, b, c)$ かつ
 $v_2 = ((c, \tau \circ (1\ 3)(1)), (b, \tau \circ (1\ 3)(2)), (a, \tau \circ (1\ 3)(3)))$, $\pi_{(1\ 3\ 2)}(v_2) = {}^{\tau \circ (1\ 3)}(c, b, a)$
- (2) $v_1 = ((c, \tau \circ (1\ 3)(1)), (b, \tau \circ (1\ 3)(2)), (a, \tau \circ (1\ 3)(3)))$, $\pi_{(1\ 3\ 2)}(v_1) = {}^{\tau \circ (1\ 3)}(c, b, a)$ かつ
 $v_2 = ((a, \tau(1)), (b, \tau(2)), (c, \tau(3)))$, $\pi_{(1\ 2)}(v_2) = {}^\tau(a, b, c)$

ここで、系 5.2.9 から $v_1 = v_2$ となることはありえないので必ず (1), (2) どちらの場合が成り立つことに注意せよ。(1) のときは $\sigma = (1\ 2)$, $\sigma^* = (1\ 3\ 2)$, $v = v_1$, $v^* = v_2$ とすればよく、(2) のときは $\sigma = (1\ 3\ 2)$, $\sigma^* = (1\ 2)$, $v = v_2$, $v^* = v_1$ とすればよい。 v, v^* と同じ表示をもつ頂点が他の木に存在しないことは系 5.2.9 からわかる。あとは $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma^*)$ における v^* の位置が $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ における v の位置と、中心に関して対称な位置にあることを示せば良いが、これは最初の頂点からの距離の帰納法で容易に示される。□

5.3 ファレイ木と分数ラベル

次に、マルコフ数の分数によるラベルを導入する。そのために、ファレイトリプルおよびファレイ木の概念を導入しよう。

定義 5.3.1. $\frac{a}{b}$ と $\frac{c}{d}$ に対し、 $ad - bc$ を

$$\det\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$$

と書く。三つ組 $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right)$ が次の条件を満たすとき、これをファレイトリプルと呼ぶ：

(1) $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ はいずれも既約分数である。

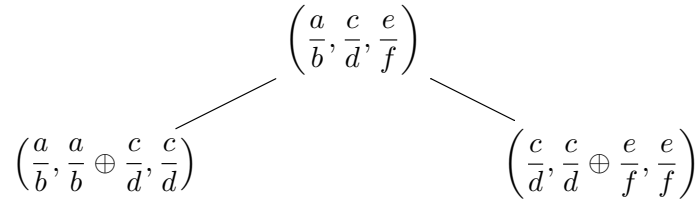
(2)

$$\left| \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} c & e \\ d & f \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} e & a \\ f & b \end{pmatrix} \right| = 1.$$

次に、**ファレイ木 FT** を以下のように定義する：

(1) 根となる頂点は $(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0})$ とする。

(2) 各頂点 $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f})$ は、次の二つの子をもつ：

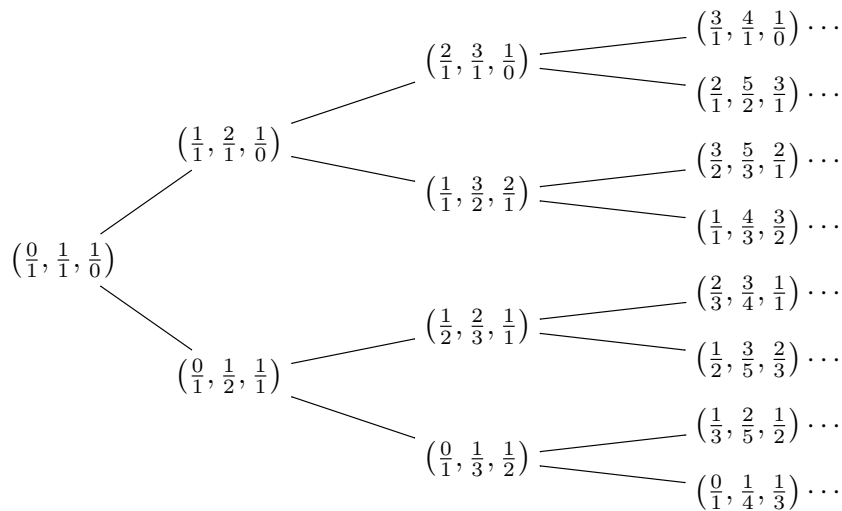


ここで

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

と定める。ただし $\frac{1}{0}$ は ∞ を表す端点として扱い、大小関係については任意の有限の非負分数より大きいものとみなす。

FT の最初のいくつかの頂点は次の通りである：



まずはこの後の議論で使われるファレイ木の基本性質を証明しよう。

命題 5.3.2. 次が成り立つ。

- (1) (r, t, s) がファレイトリプルであるとき、 $(r, r \oplus t, t)$ および $(t, t \oplus s, s)$ もまたファレイトリプルである。特に、FT のすべての頂点はファレイトリプルである。
- (2) 任意の既約分数 $t \in (0, \infty)$ に対して、 t が第 2 成分として現れるような FT のファレイトリプル F がただ一つ存在する。
- (3) FT の任意の (r, t, s) に対して、不等式 $r < t < s$ が成り立つ。

これを証明するために補題を用意しよう。

補題 5.3.3. 既約分数 $x = \frac{a}{b}$ と $y = \frac{c}{d}$ に対し $x \oplus y = \frac{a+c}{b+d}$ とおく。このとき

$$\det(x, x \oplus y) = \det(x, y), \quad \det(x \oplus y, y) = \det(x, y)$$

が成り立つ。特に $|\det(x, y)| = 1$ なら $x \oplus y$ は既約分数である。

証明. 直接計算で

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}\right) &= a(b+d) - b(a+c) = ad - bc = \det\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right), \\ \det\left(\frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right) &= (a+c)d - (b+d)c = ad - bc = \det\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \end{aligned}$$

を得る。さらに $\gcd(a+c, b+d) = g$ とすると

$$g \mid ((a+c)d - (b+d)c) = ad - bc$$

より $|\det(x, y)| = 1$ のとき $g \mid 1$ なので $g = 1$ 、すなわち $x \oplus y$ は既約である。 \square

補題 5.3.4. 非負既約分数および $\frac{1}{0}$ を含む拡張非負有理数を考える。 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ を満たし、 $ad - bc = -1$ であるとする。このとき

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

を満たす。ただし、 $\frac{1}{0}$ はすべての非負有理数より大きいものと約束する。

証明. $b, d > 0$ の場合は

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} = \frac{1}{b(b+d)} > 0,$$

および

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc - ad}{d(b+d)} = \frac{1}{d(b+d)} > 0$$

から従う。 $b = 0$ または $d = 0$ の場合は、端点が $\frac{1}{0} = \infty$ であるから、残りの不等式は定義から直ちに従う。 \square

補題 5.3.5. $(r, t, s) = \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right)$ が $r < t < s$ を満たすファレイトリプルであるとする。このとき

$$t = r \oplus s = \frac{a+e}{b+f}$$

が成り立つ。

証明. $r < t < s$ と $|\det(r, s)| = 1$ より $\det(r, s) = af - be = -1$ である。 $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{w} = (e, f)$ とおくと $\det(\mathbf{u}^T, \mathbf{w}^T) = -1$ (ここでは \det を本来の行列式の意味で使っている) なので \mathbf{u}, \mathbf{w} は \mathbb{Z}^2 の基底である。よって $\mathbf{v} := (c, d)$ は $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{w}$ と一意に書ける。一方 $r < t$ と $|\det(r, t)| = 1$ より $\det(r, t) = ad - bc = -1$ であり、従って

$$-1 = \det(\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T) = \det(\mathbf{u}^T, \alpha\mathbf{u}^T + \beta\mathbf{w}^T) = \beta \det(\mathbf{u}^T, \mathbf{w}^T) = \beta(-1)$$

から $\beta = 1$ を得る。同様に $t < s$ と $|\det(t, s)| = 1$ より $\det(t, s) = cf - de = -1$ なので

$$-1 = \det(\mathbf{v}^T, \mathbf{w}^T) = \det(\alpha\mathbf{u}^T + \mathbf{w}^T, \mathbf{w}^T) = \alpha \det(\mathbf{u}^T, \mathbf{w}^T) = \alpha(-1)$$

より $\alpha = 1$ となる。したがって $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ 、すなわち $(c, d) = (a + e, b + f)$ である。以上から $t = \frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+f} = r \oplus s$ が示された。□

命題 5.3.2 の証明. (1) を示す。 (r, t, s) をファレイトリプルとする。補題 5.3.3 より

$$|\det(r, r \oplus t)| = |\det(r, t)| = 1, \quad |\det(r \oplus t, t)| = |\det(r, t)| = 1$$

かつ $r \oplus t$ は既約である。さらに $|\det(t, r)| = |\det(r, t)| = 1$ なので $(r, r \oplus t, t)$ はファレイトリプルである。同様に $(t, t \oplus s, s)$ もファレイトリプルである。ここから、子を取る操作でファレイトリプル性が保たれることがわかる。さらに最初の頂点 $(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0})$ がファレイトリプルなので、FT のすべての頂点はファレイトリプルである。

次に (3) を示す。最初の頂点では $\frac{0}{1} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} (= \infty)$ が成り立つ。いま頂点 (r, t, s) で $r < t < s$ が成り立つと仮定する。補題 5.3.4 より $r < r \oplus t < t$ および $t < t \oplus s < s$ なので、左の子 $(r, r \oplus t, t)$ と右の子 $(t, t \oplus s, s)$ でも不等式が成り立つ。したがって深さについての帰納法により (3) が従う。

(2) を示す。任意の既約分数 $t \in (0, \infty)$ をとる。 $L_0 = \frac{0}{1}, R_0 = \frac{1}{0}$ とし、 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して帰納的に $M_i := L_i \oplus R_i$ を計算して $t < M_i$ ならば $L_{i+1} := L_i, R_{i+1} := M_i$ とし、 $t > M_i$ ならば $L_{i+1} := M_i, R_{i+1} := R_i$ とする（前者は左の子を取る操作、後者は右の子を取る操作に対応する）。また、 $t = M_i$ になったらそこでこの操作を終了する。各段階で $L_i = \frac{a_i}{b_i}, R_i = \frac{c_i}{d_i}$ と書くと、

$$M_i = \frac{a_i + c_i}{b_i + d_i}$$

であり、補題 5.3.3 より常に $|\det(L_i, R_i)| = 1$ が保たれる。特に L_i, R_i は常に既約である。また補題 5.3.4 より $L_i < t < R_i$ がすべての i で成り立つ。まずこの操作が必ず有限回で停止することを示す。両端点の分母がともに正である段階では、 M_i の分母 $b_i + d_i$ は次に選ばれる区間の端点の分母より狭義に増加する。一方、片方の端点が $\frac{1}{0}$ である間だけは分母が単調増加しない可能性がある。この場合は整数部分を進むだけであり、 t が整数ならそこで停止し、整数でなければ有限回の後に t を挟む連続する 2 つの整数の間の区間に移る。そこから先は両端点の分母が正である。また $t = \frac{p}{q}$ (既約分数) とする。両端点の分母が正で、 $L_i = \frac{a_i}{b_i} < \frac{p}{q} < R_i = \frac{c_i}{d_i}$ であるとき、

$$b_i p - a_i q \geq 1, \quad c_i q - p d_i \geq 1$$

であり、 $b_i c_i - a_i d_i = 1$ から

$$q = d_i(b_i p - a_i q) + b_i(c_i q - p d_i) \geq b_i + d_i$$

を得る。したがって、両端点の分母が正になった後は、分母が q を超える前に必ず目的の分数に到達する。ゆえに無限にこの操作が続くことはない。以上からある有限の n で $t = M_n$ となる。このとき頂点 (L_n, t, R_n) は子を取る操作を繰り返して与えられたので FT の頂点であり、したがって t が第 2 成分として現れる頂点が存在する。最後に一意性を示す。 t が第 2 成分として現れる頂点 (r, t, s) が与えられると、補題 5.3.5 により必ず $t = r \oplus s$ であり、さらに (3) より $r < t < s$ である。したがって t から上の手続きで辿る最初の頂点からの左右の選択列は一意であり、同じ t を第 2 成分にもつ異なる頂点が 2 つ存在すると最初の頂点からの経路が 2 通りになって矛盾する。ゆえにそのような頂点はただ一つである。以上から示された。□

ファレイ木は、Farey 数列や Stern–Brocot 木に由来する既約分数を全列挙する木であり、GM 数の理論との関連以外でも様々な面白い性質をもつ数学的対象であるが、ここではそれらについては割愛することにする。

さて、ファレイ木と GM 木の世代規則をみると、成分のローテーションの仕方が同じであることに気がつくであろう。これをもって、正の既約分数から GM 数への対応を考えよう。

定義 5.3.6. $f: \text{FT} \rightarrow \text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ を順序付き完全二分木同型であるとする。このとき両方の木の世代規則から、 f は端点 $0/1, 1/0$ を含む非負の既約分数から GM ペアへの全単射に持ち上がる。この対応を $t \mapsto (m_t, i_t)$ とかき、 (m_t, i_t) を GM ペアの**分数ラベル**と呼ぶ。ここで $0/1, 1/0$ はファレイ木の根 $(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0})$ の左端・右端として扱う。

本来であれば m_t, i_t は k_1, k_2, k_3, σ にも依存するのでこれらの記号を付加するべきだが、分数ラベルを使うときは必ず GM ツリーを 1 つ固定して議論するので、これらの記号は付さないこととする。この対応は単に GM ペアに名前をつけるにとどまらない重要な意味を持つことが、後で一般化強許容数列を定義するとき明らかになる。

簡単にわかるが重要な系を 1 つ挙げてこの節を締める。

系 5.3.7. ここでは $1/0 = \infty$ および $1/\infty = 0$ と約束する。任意に $t \in [0, \infty]$ をとる。 $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ で分数ラベル t を持つ (k_1, k_2, k_3) -GM ペアを (m_t, i_t) 、 $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma^*)$ において分数ラベル $\frac{1}{t}$ を持つ (k_1, k_2, k_3) -GM ペアを $(m_{\frac{1}{t}}^*, i_{\frac{1}{t}}^*)$ とする (ただし、 σ^* は定理 5.2.10 で使われているものである)。このとき $(m_t, i_t) = (m_{\frac{1}{t}}^*, i_{\frac{1}{t}}^*)$ が成り立つ。

証明. ファレイ木の t が占める位置の中央を挟んで対称の位置にある既約分数が $\frac{1}{t}$ であることを示せば、定理 5.2.10 から系が従う。上記の主張は最初の頂点からの距離の帰納法で容易に示される。□

5.4 特性数

この章の最後に、特性数と呼ばれる数を定義しておこう。まずは以下の命題を証明する。

定理 5.4.1. $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ を 1 つ固定して、 (m_r, m_t, m_s) をファレイトリプル (r, t, s) に対する GM トリプルであるとする。このとき次を満たす整数 u がただ一つ存在する。

$$\begin{cases} m_r u \equiv m_s \pmod{m_t}, \\ 0 < u < m_t. \end{cases} \quad (5.4.1)$$

この定理を示すために、いわゆるユークリッドの互除法から得られる次の結果を用いる。ここでは証明に有限正則連分数の事実を用いる。

補題 5.4.2. $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して、少なくともどちらかが 0 でないと仮定する。このときある $a, b \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$ax + by = \gcd(x, y)$$

とできる。

証明. まず $x, y \geq 0$ の場合を示す。 $y = 0$ ならば仮定から $x > 0$ であり、 $a = 1, b = 0$ とすればよい。 $x = 0$ ならば $y > 0$ であり、 $a = 0, b = 1$ とすればよい。以下では $x, y > 0$ とする。 $\gcd(x, y) = d$ と

して、 $x = dx', y = dy'$ とおく。 $\frac{x'}{y'} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ を有限正則連分数展開とする。 $n = 0$ の場合は $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$ の規約で読むことにして、 $\frac{p_i}{q_i} = [a_0; a_1, \dots, a_i]$ とする。このとき補題 2.2.5 から

$$x'q_{n-1} - y'p_{n-1} = (-1)^{n+1}$$

が成り立つ。 $(-1)^{n+1} = 1$ ならば $a = q_{n-1}, b = -p_{n-1}$, $(-1)^{n+1} = -1$ ならば $a = -q_{n-1}, b = p_{n-1}$ とおくことで $ax' + by' = 1$ となる。両辺 d をかけることで $ax + by = d$ が成り立つので主張が示された。 $x < 0$ または $y < 0$ である場合は一旦 $|x|, |y|$ をつかって上記の議論により得られる a, b をとっておき、 $|x| = -x$ ならば a を $-a$ に、 $|y| = -y$ ならば b を $-b$ に取り替えることで同様の主張を得る。□

定理 5.4.1 の証明. 条件を満たす整数の存在を示す。系 5.1.9 から $\gcd(m_r, m_t) = 1$ より、補題 5.4.2 から整数 a, b が存在して $m_r a + m_t b = 1$ となる。従って $m_r a \equiv 1 \pmod{m_t}$ であり、 a は m_r の法 m_t における逆元である。ここで $u_0 := am_s$ とおくと

$$m_r u_0 = m_r a m_s \equiv 1 \cdot m_s \equiv m_s \pmod{m_t}$$

より u_0 は合同式 $m_r x \equiv m_s \pmod{m_t}$ の解である。いま $0 \leq x < m_t$ を満たす整数 u で

$$u \equiv u_0 \pmod{m_t}$$

となるものを取る。この u も同じ合同式の解である。ここで $u = 0$ とすると $m_s \equiv 0 \pmod{m_t}$ すなわち $m_t \mid m_s$ となるが、 $\gcd(m_t, m_s) = 1$ より $m_t = 1$ となる。ところが、いま $t \in (0, \infty)$ に対応する中央成分を考えており、端点に現れる初期値 1 とは異なるので $m_t \geq 2$ である。これは矛盾である。従って $u \neq 0$ であり、 $0 < u < m_t$ を満たす解が得られる。次に一意性を示す。 u, u' がともに

$$\begin{aligned} m_r u &\equiv m_s \pmod{m_t}, & 0 < u < m_t, \\ m_r u' &\equiv m_s \pmod{m_t}, & 0 < u' < m_t \end{aligned}$$

を満たすとする。差を取ると

$$m_r(u - u') \equiv 0 \pmod{m_t}$$

すなわち $m_t \mid m_r(u - u')$ である。ここで $\gcd(m_r, m_t) = 1$ より $m_t \mid (u - u')$ が従う。しかも $0 < u, u' < m_t$ より

$$-(m_t - 1) \leq u - u' \leq m_t - 1$$

なので m_t が $u - u'$ を割るためには $u - u' = 0$ しかあり得ない。従って $u = u'$ である。以上より条件を満たす整数 u_t はただ一つ存在する。□

定義 5.4.3. $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ における任意の (k_1, k_2, k_3) -GM トリプル (m_r, m_t, m_s) に対し、(5.4.1) を満たす一意的な u を u_t とかき、**特性数**とよぶ。なおこの定義では u_t は $t \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ に対して定義されるが、 $u_{\frac{0}{1}} = -k_{\sigma(1)}$, $u_{\frac{1}{0}} = 1$ として $t \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty]$ に対して定まるように拡張する。

GM トリプルに対して定まっている特性数に対して t のみに依存した記号を用いるのは変だと思ふかもしれないが、命題 5.3.2 (2) より (r, t, s) は t によって一意に定まるため、 u_t は t のみに依存することがわかるのでこの添え字付けは妥当である。これを**特性数の分数ラベリング**と呼ぶことにする。特性数に関する重要な性質をこの節の最後に挙げる。

命題 5.4.4. 任意の既約分数 $t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ に対して、 $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ で分数ラベル t を持つ特性数を u_t とし、 $k_t := k_{i_t}$ とおく。また、 $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma^*)$ において分数ラベル $\frac{1}{t}$ を持つ特性数を $u_{\frac{1}{t}}^*$ とする (ただし、 σ^* は定理 5.2.10 で使われているものである)。このとき

$$u_{\frac{1}{t}}^* = m_t - u_t - k_t$$

が成り立つ。

この命題の証明には道具立てが必要なので、7.3 節で証明する。

第6章

フェンス型順序集合と一般化マルコフ距離

第5章では一般化マルコフ方程式、一般化マルコフ木、分数ラベル、特性数を導入し、一般化マルコフ数を系統的に扱うための算術的データを整備した。本章ではそれをさらに組合せ論と幾何の言葉に移し替えるために、フェンス型順序集合と一般化マルコフ距離を導入する。ここでの目的は、一般化マルコフ数の理論を順序集合の構造や曲線の交差を通して理解できる形に整えることにある。

本章では、まず有限整数列にフェンス型順序集合を対応させ、その順序イデアルの個数が連分数および連分数行列と密接に結びついていることを示す。これにより、第2章で見た連分数の計算が、順序集合の組合せ論として読み直せるようになる。次に交差をもつフェンス型順序集合の間に成り立つスケイン関係式を証明し、順序イデアルの個数に関する積の恒等式を得る。最後に、平面上の曲線や一般化弧に一般化マルコフ長を割り当て、その最小化として一般化マルコフ距離を定義する。これにより、前章で導入した一般化マルコフ数が、幾何学的対象の不変量としても理解できるようになる。

余談ではあるが、本章で扱う内容の背景には団代数理論が存在する。[MSW11, MSW13]において団代数の生成元を組合せ論的に記述するために定義された蛇グラフというグラフが非常に豊かな情報をマルコフ数の理論にももたらすことがわかって以来、この新しい組合せ論とマルコフ数の結びつきは切っても切れないものとなった。ここで行われる議論はその一端である。ただし蛇グラフは記述が煩雑で扱いも大変であるため、冒頭で紹介したフェンス型順序集合が、蛇グラフと等価な組合せ論的概念としてこの章の中心的な役割を担っている。

この章の内容は [BKK24, LLRS23, Ban25] に基づいているが、[BKK24] の論文は団代数理論の文脈で書かれているのでこれを本稿で適用できる形に特殊化し、[LLRS23] は $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, [Ban25] は $k_1 = k_2 = k_3$ の場合のみを与えているので、これを一般の (k_1, k_2, k_3) で使える形に一般化している。また、6.3節は [Ban25] に相当する内容を扱っており主張も基本的にこの論文に沿っているが、証明を本稿独自のものに変更している。

6.1 フェンス型順序集合の順序イデアルと連分数

定義 6.1.1. (P, \preceq) を順序集合とする。 $x, y \in P$ に対し、 $x \prec y$ で

$$x \prec y \quad \text{かつ} \quad x \prec z \prec y \quad \text{を満たす} \quad z \in P \quad \text{が存在しない}$$

を意味することとする。この関係 \prec を (P, \preceq) に付随する被覆関係という。このとき (P, \preceq) のハッセ図とは次の条件を満たすグラフである。

- 頂点集合は P である。
- 異なる頂点 $x, y \in P$ の間に辺（重複辺を考えない）が存在することと、 $x \prec y$ または $y \prec x$ が成り立つことが同値である。

さらに各辺は被覆関係において大きい元が小さい元より上に来るように平面上に配置し、辺の向きは省略するものとする。

本稿ではハッセ図がある意味で「最も単純」であるような場合の順序集合を扱う。それが次で定めるフェンス型順序集合である。

定義 6.1.2. 有限順序集合 (P, \preceq) のハッセ図が分岐を持たないグラフであるとき、 P を**フェンス型順序集合**と呼ぶ。

本稿では、フェンス型順序集合 P のハッセ図の頂点（すなわち、 P の元）に左から $1, 2, 3, \dots, m$ とラベリングすることにする（集合 $\{1, \dots, m\}$ に大小関係を導入して P と同一視していると考えても良い）。さて、正整数成分の有限数列 $S = (a_0, \dots, a_n)$ が与えられたとき、 $s_k := \sum_{i=0}^k a_i$ ($k = 0, \dots, n$) とおき順序集合 $P_S := (\{1, 2, \dots, s_n - 1\}, \preceq)$ を次のように定める: 各 $x \in P_S$ に対して $s_{k-1} \leq x < s_k$ ($s_{-1} := 0$) のとき

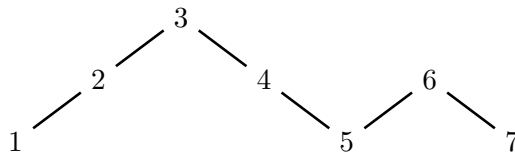
$$\varepsilon(x) := (-1)^k$$

とする。隣接する頂点 $x, x+1$ ($1 \leq x < s_n - 1$) について、 P_S 上の順序 \prec を次の被覆関係で定義する:

$$\begin{cases} x \prec x+1 & \text{if } \varepsilon(x) = 1, \\ x+1 \prec x & \text{if } \varepsilon(x) = -1. \end{cases}$$

ここで、最後の頂点のラベルは s_n ではなく $s_n - 1$ であることに注意せよ。これは、 s_k から s_{k+1} までの各頂点を結ぶ辺の本数が $a_0 - 1$ 本、 a_1 本、 a_2 本、 \dots 、 a_{n-1} 本、 $a_n - 1$ 本と、最初と最後の部分だけ数列の情報より 1 小さい値になるようにするための措置である。

例 6.1.3. $S = (3, 2, 1, 2)$ としたとき、対応する P_S のハッセ図は次のようになる。



定義 6.1.4. (P, \preceq) を順序集合とする。部分集合 $I \subset P$ が (P, \preceq) の**順序イデアル**であるとは、任意の $x \in I$ と任意の $y \in P$ に対して $y \preceq x$ のとき $y \in I$ がなりたつ、すなわち、 I は順序に関して下に閉じた部分集合であることをいう。 P の順序イデアル全体の集合を $\mathcal{J}(P)$ で表す。

環におけるイデアルと異なり、空集合も順序イデアルとみなすことに注意せよ。

例 6.1.5. $P_{(3,2,1,2)}$ の順序イデアルは次の 27 個ですべてである。

$$\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{7\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{4, 5\}, \{5, 7\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 5, 7\}, \{4, 5, 7\},$$

$\{5, 6, 7\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 5, 7\}, \{1, 4, 5, 7\}, \{1, 5, 6, 7\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5, 7\},$
 $\{1, 2, 5, 6, 7\}, \{1, 4, 5, 6, 7\}, \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$

本稿で鍵となるのは、このフェンス型順序集合の順序イデアルの個数である。 $\mathcal{J}(P)$ の元の個数を $N(P)$ で表すこととする。順序イデアル自体を手作業で全列挙するのは漏れや重複がないかどうかを確認しなければならず非常に面倒だが、実はフェンス型順序集合の順序イデアルの場合、個数だけなら簡単に計算することが可能である。それが次の定理である。

定理 6.1.6. 正整数の有限数列 (a_0, a_1, \dots, a_n) に対して、 $N(P_{(a_0, \dots, a_n)})$ を $N(a_0, \dots, a_n)$ と書くことにする。このとき

$$\frac{p_n}{q_n} := [a_0; a_1, \dots, a_n]$$

(ただし $\frac{p_n}{q_n}$ は既約) とすると、

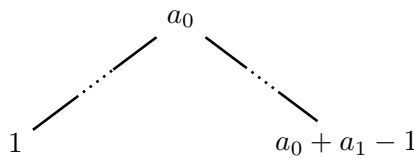
$$N(a_0, \dots, a_n) = p_n, \quad N(a_1, \dots, a_n) = q_n$$

が成り立つ。ここで $N() = 1$ とする。

証明. $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ において既約分数表示による分子が $N(a_0, a_1, \dots, a_n)$ であることと分母が $N(a_1, \dots, a_n)$ であることを示せば十分である。まず $n = 0$ の場合、 $p_0 = a_0, q_0 = 1$ である一方、 $P_{(a_0)}$ は $1 < 2 < \dots < a_0 - 1$ の全順序集合であり、順序イデアルは

$$\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, \dots, a_0 - 1\}\}$$

の a_0 個である。したがって $N(a_0) = a_0$ であり、また定義から $N() = 1$ である。したがって主張が成り立つ。 $n = 1$ のとき、 $p_1 = a_0 a_1 + 1, q_1 = a_1$ である。一方で、 $N(a_0, a_1)$ について $P_{(a_0, a_1)}$ のハッセ図は



であるから、 $P_{(a_0, a_1)}$ 自身以外の順序イデアルはすべて $\{1, 2, \dots, a_0 - 1\}$ の部分集合で構成される順序イデアル I_0 と $\{a_0 + 1, a_0 + 2, \dots, a_0 + a_1 - 1\}$ の部分集合で構成される順序イデアル I_1 の非交和で記述される。 I_0 となりうる順序イデアルは a_0 個、 I_1 となりうる順序イデアルは a_1 個あるので、順序イデアルは全部で $a_0 a_1 + 1$ 個ある。したがって $N(a_0, a_1) = a_0 a_1 + 1$ であり、また $N(a_1) = a_1$ であるから $n = 1$ の場合も主張が成り立つ。 $n > 1$ の場合を帰納法により示す。 $n - 1$ までの場合について主張の成立を仮定する。このとき p_n と q_n の漸化式 (2.2.1), (2.2.2) から、次を示せば良いことがわかる：

$$\begin{aligned} N(a_0, a_1, \dots, a_n) &= a_n N(a_0, \dots, a_{n-1}) + N(a_0, \dots, a_{n-2}) \\ N(a_1, \dots, a_n) &= a_n N(a_1, \dots, a_{n-1}) + N(a_1, \dots, a_{n-2}) \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

上の式が成り立てば下の式も同様の議論で成り立つので、上のみを示す。

まず n が奇数の場合を考える。このとき $s_n - 1$ は順序関係において極小元、 s_{n-1} は極大元である。順序イデアルを s_{n-1} を含むものと含まないものに分けて考える。

s_{n-1} を含む順序イデアルは順序について下に閉じている性質から $\{s_{n-2}, s_{n-2} + 1, \dots, s_n - 1\}$ を必ず含んでいる。したがって、すべての順序イデアルは残りの $\{1, \dots, s_{n-2} - 1\}$ に含まれる順序イデアルと $\{s_{n-2}, s_{n-2} + 1, \dots, s_n - 1\}$ の非交和で記述されることになる。 $\{1, \dots, s_{n-2} - 1\}$ に含まれる順序イデアルの個数は帰納法の仮定から $N(a_0, \dots, a_{n-2})$ 個あるので、このような順序イデアルは全部で $N(a_0, \dots, a_{n-2})$ 個あることになる。

一方で s_{n-1} を含まない順序イデアル全体は $P_{(a_0, \dots, a_n)}$ から s_{n-1} を取り除いた順序集合における順序イデアル全体との間に自然な全単射が構成でき、この順序集合は

$$P_{(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})} \sqcup P_{(a_n)}^*$$

(ただし、 P^* は P の順序関係を反転させた順序集合とする) と記述できるので、その順序イデアルの個数は $N(a_0, \dots, a_{n-1})N(a_n) = a_n N(a_0, \dots, a_{n-1})$ となる。

以上から、 n が奇数の時に

$$N(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_n N(a_0, \dots, a_{n-1}) + N(a_0, \dots, a_{n-2})$$

が示された。 n が偶数のときも s_{n-1} を含む場合と含まない場合に分けることで同様の結論を得る(ただし、 s_{n-1} を含む場合の順序イデアルの個数が $a_n N(a_0, \dots, a_{n-1})$ 個、含まない場合が $N(a_0, \dots, a_{n-2})$ 個になる)。議論はほとんど奇数の場合と変わらないのでその詳細な証明は読者に委ねる。□

したがって、 $P_{(a_0, \dots, a_n)}$ の順序イデアルの個数は連分数 $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ を既約分数に直してその分子を見ればわかる。なお、双対的に次の定理も成り立つ。

定理 6.1.7. 定理 6.1.6 の $P_{(a_0, \dots, a_n)}$ を $P_{(a_0, \dots, a_n)}^*$ に変えても同様の主張が成り立つ。

証明. 定理 6.1.6 と同じ漸化式を確認すれば良い。証明方針は定理 6.1.6 とほぼ同じなので、詳細は読者に委ねる。□

さらに、直ちに次の系が成り立つ。

系 6.1.8. $n \geq 1$ とし、正整数の有限数列 (a_0, \dots, a_n) に対して

$$F_{(a_0, a_1, \dots, a_n)} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(a_0, \dots, a_n) & N(a_0, \dots, a_{n-1}) \\ N(a_1, \dots, a_n) & N(a_1, \dots, a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

が成り立つ。

証明. 定理 6.1.6 と定理 2.2.4 からしたがう。□

この対応が、組合せ理論と連分数理論の架け橋である。また、これを利用することで次の命題が成り立つ。

命題 6.1.9. (a_0, a_1, \dots, a_n) を正整数の有限数列とする。このとき、次が成立する。

- (1) $N(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = N(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$,
- (2) $a_n \geq 2$ のとき

$$N(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = N(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1)$$

が成り立つ。また、 $a_0 \geq 2$ のとき

$$N(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = N(1, a_0 - 1, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$$

が成り立つ。

証明. (1) を示す。各行列 $F_a = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ は対称行列であるから、

$$F_{a_n} F_{a_{n-1}} \cdots F_{a_0} = (F_{a_0} F_{a_1} \cdots F_{a_n})^T$$

が成り立つ。系 6.1.8 を右辺に適用すると

$$F_{a_n} F_{a_{n-1}} \cdots F_{a_0} = \begin{bmatrix} N(a_0, \dots, a_n) & N(a_1, \dots, a_n) \\ N(a_0, \dots, a_{n-1}) & N(a_1, \dots, a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

を得る。一方、左辺に同じ系を適用したときの $(1, 1)$ 成分は $N(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$ である。よって $(1, 1)$ 成分を比較すれば $N(a_0, a_1, \dots, a_n) = N(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$ が従う。(2) を示す。まず $a_n \geq 2$ とする。連分数の定義から

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$$

であるから、定理 6.1.6 より最初の等式が従う。次に $a_0 \geq 2$ とする。いま示した等式を反転列 $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$ に適用し、さらに (1) を用いると

$$N(a_0, \dots, a_n) = N(a_n, \dots, a_0) = N(a_n, \dots, a_1, a_0 - 1, 1) = N(1, a_0 - 1, a_1, \dots, a_n)$$

となる。 □

6.2 フェンス型順序集合のスケイン関係式

この節では複数のフェンス型集合の間に成立する関係式について述べる。フェンス型順序集合 P のラベル i がついた頂点を $P(i)$ とかく。また、 $i \leq j$ に対して P のラベルが $\{i, i+1, \dots, j-1, j\}$ であるような部分順序集合を $P[i, j]$ で表すことにする。さらに $i > j$ の場合は $P[i, j] = \emptyset$ と約束する。

定義 6.2.1. 二つのフェンス型順序集合 P_1, P_2 が、それぞれ $R_1 = P_1[c, d]$ および $R_2 = P_2[c', d']$ という形の同型な部分順序集合をもつとき、それらは**重複**をもつという ($c = d, c' = d'$ の場合も含む)。このとき、この同型は各集合の元にラベル付けされている整数の通常の意味での順序と整合的でなければならないことを強調しておく。すなわち、ハッセ図上で対応する部分の頂点を左から順番に見たときに同じ形状をしていなければならない (鏡写しになってはいけない)。

さらに、次の条件を満たすとき、この重複を**交差重複**という：

- R_1 は P_1 の順序関係で上に閉じており、 R_2 は P_2 の順序関係で下に閉じている。
- $c = 1$ と $c' = 1$ が同時に成り立つことはない。
- $d = h_1$ と $d' = h_2$ が同時に成り立つことはない。ただし $h_i = |P_i|$ である。

定義 6.2.2. 交差重複 $R_1 = P_1[c, d] \cong P_2[c', d'] = R_2$ をもつ二つのフェンス型順序集合 P_1, P_2 が与えられているとする。 P_1 と P_2 の **0 型解消**を次の 4 つのフェンス型順序集合 $\{P_3, P_4, P_5, P_6\}$ で定義する。ただし P_3, P_4, P_5, P_6 は次のように定める。

- P_3 を $P_1[1, d] \cup P_2[d' + 1, h_2]$ 上の順序集合とし、誘導されるすべての順序関係に加えて $P_1(d) \leq P_2(d' + 1)$ を課す。
- P_4 を $P_2[1, d'] \cup P_1[d + 1, h_1]$ 上の順序集合とし、誘導されるすべての順序関係に加えて $P_2(d') \geq P_1(d + 1)$ を課す。
- P_5 の構成は c および c' に依存する。
 - $c > 1$ かつ $c' > 1$ の場合、 P_5 を $P_1[1, c - 1] \cup P_2[1, c' - 1]$ 上の順序集合とし、誘導されるすべての順序関係に加えて $P_1(c - 1) \geq P_2(c' - 1)$ を課す。
 - $c = 1$ (したがって $c' > 1$) の場合 $P_2(v) \not\leq P_2(c' - 1)$ を満たす最大の整数 $v < c' - 1$ が存在すればそれを取り、存在しなければ $v = 0$ とする。 P_5 を誘導部分順序集合 $P_2[1, v]$ とする。
 - $c' = 1$ (したがって $c > 1$) の場合、 $P_1(u) \not\leq P_1(c - 1)$ を満たす最大の整数 $u < c - 1$ が存在すればそれを取り、存在しなければ $u = 0$ とする。 P_5 を誘導部分順序集合 $P_1[1, u]$ とする。
- P_6 の構成は d および d' に依存する。
 - $d < h_1$ かつ $d' < h_2$ の場合、 P_6 を $P_1[d + 1, h_1] \cup P_2[d' + 1, h_2]$ 上の順序集合とし、誘導されるすべての順序関係に加えて $P_1(d + 1) \geq P_2(d' + 1)$ を課す。
 - $d = h_1$ (したがって $d' < h_2$) の場合、 $P_2(v) \not\leq P_2(d' + 1)$ を満たす最小の整数 $v > d' + 1$ が存在すればそれを取り、存在しなければ $v = h_2 + 1$ とする。 P_6 を誘導部分順序集合 $P_2[v, h_2]$ とする。
 - $d' = h_2$ (したがって $d < h_1$) の場合、 $P_1(u) \not\leq P_1(d + 1)$ を満たす最小の整数 $u > d + 1$ が存在すればそれを取り、存在しなければ $u = h_1 + 1$ とする。 P_6 を誘導部分順序集合 $P_1[u, h_1]$ とする。

定理 6.2.3. 交差重複をもつフェンス型順序集合 P_1 と P_2 に対して、その 0 型解消 $\{P_3, P_4, P_5, P_6\}$ をとる。 $N(P_{(a_1, \dots, a_n)}) := N(a_1, \dots, a_n)$ とかくことにすると、次が成立する：

$$N(P_1)N(P_2) = N(P_3)N(P_4) + N(P_5)N(P_6). \quad (6.2.1)$$

定理を証明するために、切り替え点の概念を導入する。

定義 6.2.4. フェンス型順序集合 P_1, P_2 が $P_1[c, d] \cong P_2[c', d']$ の重複を持つとする。ここで、 $d - c = m$ であるとしておく。この重複と任意の順序イデアル $(I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2)$ に対し切り替え点を次で定義する：

$$\kappa(I_1, I_2) := \min \left\{ i \in \{0, \dots, m\} \mid P_1(c + i) \in I_1 \iff P_2(c' + i) \in I_2 \right\},$$

ただしそのような i が存在しない場合は「切り替え点は存在しない」と定める。

このとき、次の補題が成立する。

補題 6.2.5. 同型なフェンス型順序集合 P_1, P_2 をとる。 $I_1 \in \mathcal{J}(P_1)$ 、 $I_2 \in \mathcal{J}(P_2)$ に対し、 I_1 と I_2 の切り替え点 $\kappa(I_1, I_2)$ が存在しないのは、

$$(I_1, I_2) = (P_1, \emptyset) \quad \text{または} \quad (I_1, I_2) = (\emptyset, P_2)$$

の場合に限る。

証明. 切り替え点が存在しないと仮定する。まず $P_1(1) \in I_1, P_2(1) \notin I_2$ の場合を考える。このとき $P_1(2) \notin I_1$ は起こりえない。実際、 $P_1(2) \notin I_1$ ならば $P_1(1) < P_1(2)$ なので、 $P_1 \cong P_2$ から $P_2(1) < P_2(2)$ であり、ここで I_2 がイデアルであることにより $P_2(2) \in I_2$ とすると $P_2(1) \in I_2$ でなければならず、 $P_2(1) \notin I_2$ の仮定に反する。 $P_2(2) \notin I_2$ とすると今度は切り替え点が存在しないという仮定に反する。また、同様の理由で $P_2(2) \in I_2$ も起こり得ない。従って $P_1(2) \in I_1, P_2(2) \notin I_2$ である。以後同様に $i = 3, 4, \dots$ と順に繰り返すと、切り替え点が存在しないためにはすべての i について $P_1(i) \in I_1, P_2(i) \notin I_2$ が必要である。よって $I_1 = P_1$ かつ $I_2 = \emptyset$ が従う。反対の場合 $(I_1, I_2) = (\emptyset, P_2)$ は P_1 と P_2 の役割を入れ替えることで同様に示せる。また、逆向きの隣接関係から始まる場合も、上向きと下向きを入れ替えて同じ議論を行えばよい。 \square

定理 6.2.3 の証明. 全単射 $\mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2) \rightarrow (\mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)) \sqcup (\mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6))$ を構成すれば、両辺の元の個数の比較によって等式が成り立つことがわかる。以下、2つのケースに分けて証明する。

ケース 1: $c > 1, c' > 1, d < h_1, d' < h_2$ の場合. $\mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2) = A \sqcup B$ と分解し、 A と $\mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)$ の間と、 B と $\mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)$ の間にそれぞれ全単射を構成する。 A は $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4$ で与えられる。ただし、

$$A_1 := \{(I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2) \mid I_1 \cap R_1, I_2 \cap R_2 \text{ に切り替え点が存在する}\},$$

$$A_2 := \{(I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2) \mid I_1 \cap R_1 = \emptyset, I_2 \cap R_2 = R_2\},$$

$$A_3 := \{(I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2) \mid I_1 \cap R_1 = R_1, I_2 \cap R_2 = \emptyset, P_1(d+1) \in I_1, P_2(d'+1) \notin I_2\},$$

$$A_4 := \left\{ (I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2) \left| \begin{array}{l} I_1 \cap R_1 = R_1, I_2 \cap R_2 = \emptyset, P_1(c-1) \in I_1, P_2(c'-1) \notin I_2, \\ P_1(d+1) \in I_1 \Rightarrow P_2(d'+1) \in I_2 \end{array} \right. \right\}$$

$$B := \left\{ (I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2) \left| \begin{array}{l} I_1 \cap R_1 = R_1, I_2 \cap R_2 = \emptyset, P_1(c-1) \in I_1 \Rightarrow P_2(c'-1) \in I_2, \\ P_1(d+1) \in I_1 \Rightarrow P_2(d'+1) \in I_2 \end{array} \right. \right\}$$

である。これで $\mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2)$ 全体を尽くすことは、補題 6.2.5 から切り替え点が存在しない場合が $I_1 \cap R_1 = R_1, I_2 \cap R_2 = \emptyset$ または $I_1 \cap R_1 = \emptyset, I_2 \cap R_2 = R_2$ しかないことから従う ($A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4 \sqcup B$ が切り替え点が存在しない場合をすべて尽くしている)。

まず $\Phi_1: A \rightarrow \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)$ を定める。 P_3 および P_4 は P_1 または P_2 の部分順序集合を貼り合わせて得られるので、 P_3, P_4 の各元は P_1 または P_2 の元に自然に対応する。そこで $P_3(i, j), P_4(i, j)$ を P_i のラベル j に対応する P_3, P_4 の元として表すことにする。ただし、交差重複部分については同じ頂点に $i = 1, 2$ の場合の両方の表示が存在することに注意せよ。

以後この対応を用いて、任意の順序イデアルのペア $(I_1, I_2) \in A$ に対し $(I_3, I_4) \in \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)$ を以下のように定める。 P_1, P_2 の交差重複部分を $R_1 \subset P_1, R_2 \subset P_2$ とする。 P_3, P_4 における対応部分を $R_3 \subset P_3, R_4 \subset P_4$ と書く。まず

$$I_3^{\text{out}} \subset P_3 \setminus R_3, \quad I_4^{\text{out}} \subset P_4 \setminus R_4$$

を次で定める：

$$P_3(i, j) \in I_3^{\text{out}} \iff P_3(i, j) \in P_3 \setminus R_3 \text{ かつ、} i = 1 \text{ のとき } P_1(j) \in I_1, i = 2 \text{ のとき } P_2(j) \in I_2$$

$$P_4(i, j) \in I_4^{\text{out}} \iff P_4(i, j) \in P_4 \setminus R_4 \text{ かつ、} i = 1 \text{ のとき } P_1(j) \in I_1, i = 2 \text{ のとき } P_2(j) \in I_2$$

したがって、以後は重複部分の所属 $I_3 \cap R_3, I_4 \cap R_4$ のみを場合分けして与え、

$$I_3 := I_3^{\text{out}} \cup (I_3 \cap R_3), \quad I_4 := I_4^{\text{out}} \cup (I_4 \cap R_4)$$

によって $(I_3, I_4) \in \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)$ を構成する。まず $(I_1, I_2) \in A_1$ とし、 R_1, R_2 上の切り替え点のラベルを、 P_1 側で k 、 P_2 側で k' とする。このとき R_3 (および R_4) 上の所属は、切り替え点を境に P_1 由来部分と P_2 由来部分を入れ替えることで定める。すなわち、

$$\begin{aligned} P_3(1, j) \in I_3 &\iff P_1(j) \in I_1 & (1 \leq j \leq k-1) \\ P_3(2, j) \in I_3 &\iff P_2(j) \in I_2 & (k' \leq j \leq h_2) \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} P_4(2, j) \in I_4 &\iff P_2(j) \in I_2 & (1 \leq j \leq k'-1) \\ P_4(1, j) \in I_4 &\iff P_1(j) \in I_1 & (k \leq j \leq h_1) \end{aligned}$$

とする。この定め方により、切り替え点近傍で下に閉じる性質が保たれ、さらに外側は I_1, I_2 の下に閉じる性質を受け継ぐので、 I_3, I_4 はいずれも順序イデアルである。

次に A_2, A_3, A_4 についても、交差重複部分の外側は上で定めた $I_3^{\text{out}}, I_4^{\text{out}}$ のままとし、交差重複部分の所属のみを次で与える：

- $(I_1, I_2) \in A_2$ のとき、 $I_3 \cap R_3 = R_3, I_4 \cap R_4 = \emptyset$ と定める。
- $(I_1, I_2) \in A_3$ のとき、 $I_3 \cap R_3 = \emptyset, I_4 \cap R_4 = R_4$ と定める。
- $(I_1, I_2) \in A_4$ のとき、 $I_3 \cap R_3 = R_3, I_4 \cap R_4 = \emptyset$ と定める。

以上により、各 $(I_1, I_2) \in A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4$ に対し、 $\Phi_1(I_1, I_2) = (I_3, I_4)$ が構成される。

次に写像 $\Phi_2: B \rightarrow \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)$ を構成する。 $P_5 \cup P_6$ は $P_1 \cup P_2$ から R_1, R_2 を取り除いた頂点に対応する形で定まっているので、 $(I_1, I_2) \in B$ が与えられたときに $(I_1 \setminus (I_1 \cap R_1)) \cup (I_2 \setminus (I_2 \cap R_2))$ に対応する P_5 の元全体を I_5 、 P_6 の元全体を I_6 と定める。このとき、 P_5, P_6 の定め方と B の条件から I_5, I_6 は順序イデアルとなる。そこで、 $\Phi_2(I_1, I_2) = (I_5, I_6)$ とする。以上から $A \sqcup B$ で $(\mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)) \sqcup (\mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6))$ への写像 $\Phi := \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ が定まった。これが全単射であることを示す。

そのために、逆写像 Ψ を構成しよう。ここで $\langle x \rangle$ は x が生成する順序イデアルを表す。まず $\Psi_1: \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4) \rightarrow \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2)$ を定める。 $\mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)$ を次の A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 に分割する。

$$\begin{aligned} A'_1 &:= \{(I_3, I_4) \in \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4) \mid I_3 \cap R_3 \text{ と } I_4 \cap R_4 \text{ の間に切り替え点が存在する}\}, \\ A'_2 &:= \{(I_3, I_4) \in \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4) \mid I_3 \cap R_3 = R_3, I_4 \cap R_4 = \emptyset, P_4(1, d+1) \in I_4, P_3(2, d'+1) \notin I_3\}, \\ A'_3 &:= \{(I_3, I_4) \in \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4) \mid I_3 \cap R_3 = \emptyset, I_4 \cap R_4 = R_4\}, \\ A'_4 &:= \{(I_3, I_4) \in \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4) \mid I_3 \cap R_3 = R_3, I_4 \cap R_4 = \emptyset, P_4(1, d+1) \in I_4 \Rightarrow P_3(2, d'+1) \in I_3\}. \end{aligned}$$

P_3 および P_4 は P_1 と P_2 の部分順序集合を貼り合わせて得られるので、 $P_1 \setminus R_1$ および $P_2 \setminus R_2$ の各元は、それぞれ $P_3 \setminus R_3$ または $P_4 \setminus R_4$ の元に自然に対応する。以後この対応を用いて、任意の $(I_3, I_4) \in \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)$ に対し、まず外側部分

$$I_1^{\text{out}} \subset P_1 \setminus R_1, \quad I_2^{\text{out}} \subset P_2 \setminus R_2$$

を次で定める：

$$x \in I_1^{\text{out}} \iff x \in P_1 \setminus R_1 \text{ に対応する } P_3 \text{ または } P_4 \text{ の元が、それぞれ } I_3 \text{ または } I_4 \text{ に属する}$$

$y \in I_2^{\text{out}} \iff y \in P_2 \setminus R_2$ に対応する P_3 または P_4 の元が、それぞれ I_3 または I_4 に属する

したがって、以後は交差重複部分の所属 $I_1 \cap R_1, I_2 \cap R_2$ のみを場合分けして与え、

$$I_1 := I_1^{\text{out}} \cup (I_1 \cap R_1), \quad I_2 := I_2^{\text{out}} \cup (I_2 \cap R_2)$$

によって $(I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2)$ を構成する。

以下、 (I_3, I_4) が属する部分集合 $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 \subset \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)$ に応じて、 R_1, R_2 上の所属を以下のように定めて (I_1, I_2) を構成する。

- $(I_3, I_4) \in A'_1$ のとき： R_3, R_4 上の最初の切り替え点のラベルを、 P_3 側で k 、 P_4 側で k' とする。このとき R_1, R_2 の元の所属を

$$\begin{aligned} P_1(j) \in I_1 &:\iff P_3(1, j) \in I_3 & (1 \leq j \leq k-1), \\ P_1(j) \in I_1 &:\iff P_4(1, j) \in I_4 & (k \leq j \leq h_1), \\ P_2(j) \in I_2 &:\iff P_4(2, j) \in I_4 & (1 \leq j \leq k'-1), \\ P_2(j) \in I_2 &:\iff P_3(2, j) \in I_3 & (k' \leq j \leq h_2) \end{aligned}$$

により定める。

- $(I_3, I_4) \in A'_2$ のとき、 $I_1 \cap R_1 = \emptyset, I_2 \cap R_2 = R_2$ と定める。
- $(I_3, I_4) \in A'_3$ のとき、 $I_1 \cap R_1 = R_1, I_2 \cap R_2 = \emptyset$ と定める。
- $(I_3, I_4) \in A'_4$ のとき、 $I_1 \cap R_1 = R_1, I_2 \cap R_2 = \emptyset$ と定める。

以上により、 $\Psi_1(I_3, I_4) = (I_1, I_2)$ とすると、任意の i で $\Psi_1(A'_i) \subset A_i$ となるので (確認は読者に委ねる)、とくに $\Psi_1: \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4) \rightarrow A$ が定まる。次に、 $\Psi_2: \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6) \rightarrow B$ を構成する。 $P_5 \cup P_6$ は $P_1 \cup P_2$ から R_1, R_2 の頂点を取り除いたものに自然に対応しているので、 $P_5 \cup P_6$ の各元は $(P_1 \setminus R_1) \cup (P_2 \setminus R_2)$ の元に自然に対応する。任意の $(I_5, I_6) \in \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)$ に対し、

$$S := I_5 \cup I_6 \subset P_5 \cup P_6$$

とおく。上の自然な対応により S を $(P_1 \setminus R_1) \cup (P_2 \setminus R_2)$ の部分集合とみなし、

$$I_1 := (S \cap (P_1 \setminus R_1)) \cup R_1, \quad I_2 := S \cap (P_2 \setminus R_2)$$

と定める (ここで R_1 を加えるのは、 B の定義において $R_1 \subset I_1$ が要求されるためである)。このとき $(I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2)$ となり、写像 $\Psi_2: \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6) \rightarrow B$ が定まる。以上から $\Psi := \Psi_1 \sqcup \Psi_2: (\mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)) \sqcup (\mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)) \rightarrow \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2)$ が定まった。 Ψ が Φ の逆写像であることは対応を追いかければわかる。よって示された。

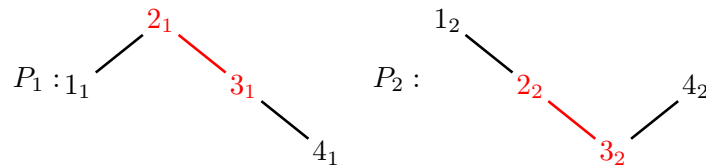
ケース 2: それ以外の場合。 証明方針はケース 1 と同じである。ただし $A_1, A_2, A_3, A_4, B, A'_1, A'_2, A'_3, A'_4$ の条件が少し異なる (いずれもケース 1 の自然な拡張である)。

- $c = 1$ のとき： A_4 の条件のうち「 $P_1(c-1) \in I_1$ 」がなくなり、 B の条件のうち「 $P_1(c-1) \in I_1 \Rightarrow P_2(c'-1) \in I_2$ 」が「 $P_2(c'-1) \in I_2$ 」となる。
- $c' = 1$ のとき： A_4 の条件のうち「 $P_2(c'-1) \notin I_2$ 」がなくなり、 B の条件のうち「 $P_1(c-1) \in I_1 \Rightarrow P_2(c'-1) \in I_2$ 」が「 $P_1(c-1) \notin I_1$ 」となる。

- $d = h_1$ のとき: A_3 の条件のうち「 $P_1(d+1) \in I_1$ 」がなくなり、 A_4 の条件のうち「 $P_1(d+1) \in I_1 \Rightarrow P_2(d'+1) \in I_2$ 」が「 $P_2(d'+1) \in I_2$ 」となる。 B の条件のうち「 $P_1(d+1) \in I_1 \Rightarrow P_2(d'+1) \in I_2$ 」が「 $P_2(d'+1) \in I_2$ 」となる。 A'_2 の条件のうち「 $P_4(1, d+1) \in I_4$ 」がなくなり、 A'_4 の条件のうち「 $P_4(1, d+1) \in I_4 \Rightarrow P_3(2, d'+1) \in I_3$ 」が「 $P_3(2, d'+1) \in I_3$ 」となる。
- $d' = h_2$ のとき: A_3 の条件のうち「 $P_2(d'+1) \notin I_2$ 」がなくなり、 A_4 の条件のうち「 $P_1(d+1) \in I_1 \Rightarrow P_2(d'+1) \in I_2$ 」が「 $P_1(d+1) \notin I_1$ 」となる。 B の条件のうち「 $P_1(d+1) \in I_1 \Rightarrow P_2(d'+1) \in I_2$ 」が「 $P_1(d+1) \notin I_1$ 」となる。 A'_2 の条件のうち「 $P_3(2, d'+1) \notin I_3$ 」がなくなり、 A'_4 の条件のうち「 $P_4(1, d+1) \in I_4 \Rightarrow P_3(2, d'+1) \in I_3$ 」が「 $P_4(1, d+1) \notin I_4$ 」となる。

ここで端点に空の区間が現れる場合は上の規約 $P[i, j] = \emptyset$ に従って読む。この規約のもとでは、構成した写像と逆写像は境界の場合にも順序イデアル条件を保ち、互いに逆であることはケース 1 と同じ確認で従う。以上により示された。□

例 6.2.6. $P_1 := P_{(2,2,1)}, P_2 := P_{(1,2,2)}$ とおき、 $R_1 := P_1[2, 3], R_2 := P_2[2, 3]$ を考える。このとき、 P_1, P_2 のハッセ図は次のようになる：

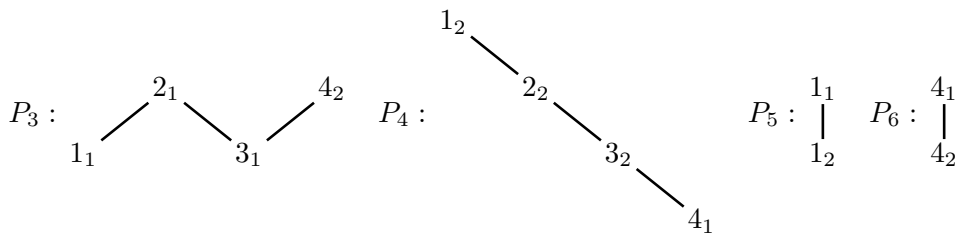


R_1, R_2 はともに 2 頂点からなる鎖であり (赤で示した部分)、 R_1 は P_1 で上に閉じ、 R_2 は P_2 で下に閉じているのでこれは交差重複である。

このとき $h_1 = h_2 = 4, (c, d, c', d') = (2, 3, 2, 3)$ であり、0 型解消 $\{P_3, P_4, P_5, P_6\}$ は

- P_3 : $P_1[1, 3] \cup P_2[4, 4]$ に $P_1(3) < P_2(4)$ を課したもの、
- P_4 : $P_2[1, 3] \cup P_1[4, 4]$ に $P_2(3) > P_1(4)$ を課したもの、
- P_5 : $P_1[1, 1] \cup P_2[1, 1]$ に $P_1(1) > P_2(1)$ を課したもの、
- P_6 : $P_1[4, 4] \cup P_2[4, 4]$ に $P_1(4) > P_2(4)$ を課したもの

であるからハッセ図は以下のようになる。



また

$$N(P_1) = N(2, 2, 1) = 7, \quad N(P_2) = N(1, 2, 2) = 7, \quad N(P_3) = N(2, 1, 2) = 8, \\ N(P_4) = 5, \quad N(P_5) = N(P_6) = 3$$

なので

$$N(P_1)N(P_2) = 7 \cdot 7 = 49 = 8 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = N(P_3)N(P_4) + N(P_5)N(P_6)$$

となり定理 6.2.3 も確かめられる。

定義 6.2.7. 2つのフェンス型順序集合 P_1, P_2 が与えられているとする。 $P_2(i) \succ P_2(i+1)$ を満たす $1 \leq i < h_2 := |P_2|$ を選ぶ。このとき、 i に関する P_1 と P_2 の **1型解消** を4つのフェンス型順序集合 $\{P_3, P_4, P_5, P_6\}$ として定める。ただし P_3, P_4, P_5, P_6 は次で定める。

- P_3 を $P_1 \cup P_2[1, i]$ 上の順序集合とし、誘導されるすべての順序関係に加えて $P_2(i) \prec P_1(1)$ を課す。
- $v > i$ を、存在するならば $P_2(i) \not\prec P_2(v)$ を満たす最小の整数とし、存在しなければ $v = h_2 + 1$ とする。 P_4 を P_2 の部分順序集合 $P_2[v, h_2]$ とする。
- P_5 を $P_1 \cup P_2[i+1, h_2]$ 上の順序集合とし、誘導されるすべての順序関係に加えて $P_2(i+1) \succ P_1(1)$ を課す。
- $u < i$ を、存在するならば $P_2(i) \not\prec P_2(u)$ を満たす最大の整数とし、存在しなければ $u = 0$ とする。 P_6 を P_2 の部分順序集合 $P_2[1, u]$ とする。

定理 6.2.8. フェンス型順序集合 P_1 と P_2 に対して、その1型解消を $\{P_3, P_4, P_5, P_6\}$ とする。このとき次が成立する：

$$N(P_1)N(P_2) = N(P_3)N(P_4) + N(P_5)N(P_6). \quad (6.2.2)$$

証明. 全単射 $\mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2) \rightarrow (\mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)) \sqcup (\mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6))$ を構成すれば、両辺の元の個数の比較によって等式が成り立つことがわかる。まず $\mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2) = A \sqcup B$ と分割する。ただし

$$\begin{aligned} A &= \{(I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2) \mid P_2(i+1) \in I_2 \text{ かつ } \lceil P_1(1) \in I_1 \Rightarrow P_2(i) \in I_2 \rceil\} \\ B &= \{(I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2) \mid P_2(i+1) \notin I_2 \text{ または } \lceil P_1(1) \in I_1 \text{ かつ } P_2(i) \notin I_2 \rceil\} \end{aligned}$$

とする。 $\Phi_1: A \rightarrow \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)$ を定める。任意の順序イデアルのペア $(I_1, I_2) \in A$ に対して $(I_3, I_4) \in \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)$ を次で与える。

$$\begin{aligned} x \in I_3 &\iff x \text{ に対応する } P_1 \text{ または } P_2 \text{ の元が } I_1 \text{ または } I_2 \text{ に属する} \\ y \in I_4 &\iff y \text{ に対応する } P_2 \text{ の元が } I_2 \text{ に属する} \end{aligned}$$

このとき、 I_3 と I_4 は集合 A の条件からそれぞれ P_3, P_4 の順序イデアルである。これを用いて $\Phi_1(I_1, I_2) = (I_3, I_4)$ で $\Phi_1: A \rightarrow \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)$ を定義する。

同様に、 $\Phi_2: B \rightarrow \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)$ を定める。任意の順序イデアルのペア $(I_1, I_2) \in B$ に対して $(I_5, I_6) \in \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)$ を次で与える。

$$\begin{aligned} x \in I_5 &\iff x \text{ に対応する } P_1 \text{ または } P_2 \text{ の元が } I_1 \text{ または } I_2 \text{ に属する} \\ y \in I_6 &\iff y \text{ に対応する } P_2 \text{ の元が } I_2 \text{ に属する} \end{aligned}$$

このとき、 I_5 と I_6 は集合 B の条件からそれぞれ P_5, P_6 の順序イデアルである。これを用いて $\Phi_2(I_1, I_2) = (I_5, I_6)$ で $\Phi_2: B \rightarrow \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)$ を定義する。以上から $A \sqcup B$ で $(\mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)) \sqcup (\mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6))$ への写像 $\Phi := \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ が定まった。これが全単射であることを示す。

そのために、逆写像 Ψ を構成しよう。任意の順序イデアルのペア $(I_3, I_4) \in \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)$ に対して $(I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2)$ を次で与える。

$$P_1(j) \in I_1 \iff P_3(1, j) \in I_3$$

$$P_2(j) \in I_2 : \iff P_2(j) \in \langle P_2(i+1) \rangle \text{ または } P_3(2, j) \in I_3 \text{ または } P_4(2, j) \in I_4$$

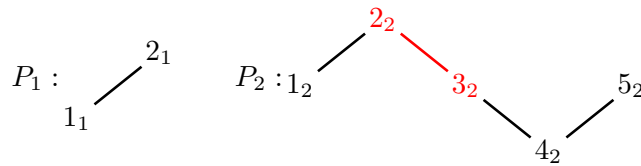
このとき、 I_1 と I_2 はそれぞれ P_1, P_2 の順序イデアルである。これを用いて $\Psi_1(I_3, I_4) = (I_1, I_2)$ で $\Psi_1: \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4) \rightarrow \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2)$ を定義する。このとき特に、 Ψ_1 の定め方から $\Psi_1(\mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)) \subset A$ であることが確かめられる。

同様に、 $\Psi_2: \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6) \rightarrow B$ を定める。任意の順序イデアルのペア $(I_5, I_6) \in \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)$ に対して $(I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2)$ を次で与える。

$$\begin{aligned} P_1(j) \in I_1 &: \iff P_5(1, j) \in I_5 \\ P_2(j) \in I_2 &: \iff j \geq i+1 \text{ かつ } P_5(2, j) \in I_5, \text{ または } j \leq i \text{ かつ } P_6(j) \in I_6 \end{aligned}$$

このとき、 I_1 と I_2 はそれぞれ P_1, P_2 の順序イデアルである。これを用いて $\Psi_2(I_5, I_6) = (I_1, I_2)$ で $\Psi_2: \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6) \rightarrow \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2)$ を定義する。このときとくに、 Ψ_2 の定め方から $\Psi_2(\mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)) \subset B$ であることが確かめられる。以上から $\Psi := \Psi_1 \sqcup \Psi_2: (\mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)) \sqcup (\mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)) \rightarrow A \sqcup B$ が定まった。 Φ と Ψ が互いに逆写像であることは対応を追いかければわかる。以上から示された。□

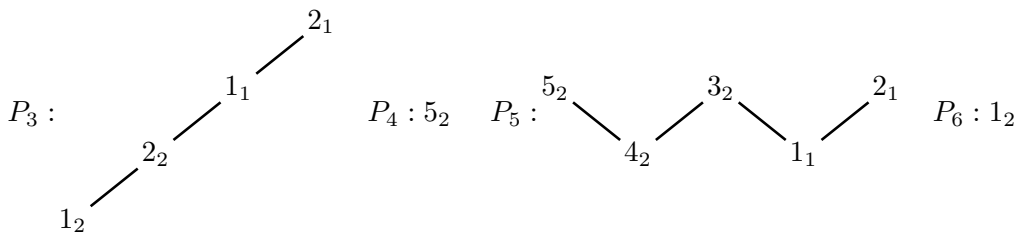
例 6.2.9. $P_1 := P_{(2,1)}$, $P_2 := P_{(2,2,2)}$ とおき、 $i = 2$ とする。このとき $P_2(2) \succ P_2(3)$ である。 P_1, P_2 のハッセ図は次のようになる：



したがって、 $i = 2$ に関する P_1 と P_2 の 1 型解消を考えることができる（解消のための条件となっている P_2 側の局所順序を赤色で提示している）。このとき、 $P_2(2) \not\prec P_2(v)$ を満たす最小の $v > 2$ は $v = 5$ であり、また $P_2(2) \not\prec P_2(u)$ を満たす最大の $u < 2$ は $u = 1$ である。よって、1 型解消 $\{P_3, P_4, P_5, P_6\}$ は

$$\begin{aligned} P_3 &: P_1 \cup P_2[1, 2] \text{ に } P_2(2) \prec P_1(1) \text{ を課したもの,} \\ P_4 &:= P_2[5, 5], \\ P_5 &: P_1 \cup P_2[3, 5] \text{ に } P_2(3) \succ P_1(1) \text{ を課したもの,} \\ P_6 &:= P_2[1, 1] \end{aligned}$$

であるから、ハッセ図は以下のようなになる。



したがって

$$\begin{aligned} N(P_1) &= N(2, 1) = 3, \quad N(P_2) = N(2, 2, 2) = 12, \quad N(P_3) = N(5) = 5, \\ N(P_4) &= N(1, 1) = 2, \quad N(P_5) = N(2, 1, 1, 2) = 13, \quad N(P_6) = N(1, 1) = 2 \end{aligned}$$

となる。よって

$$N(P_1)N(P_2) = 3 \cdot 12 = 36 = 5 \cdot 2 + 13 \cdot 2 = N(P_3)N(P_4) + N(P_5)N(P_6)$$

となり、たしかに定理 6.2.8 の等式が成り立つ。

定義 6.2.10. 2つのフェンス型順序集合 P_1, P_2 が与えられているとする。このとき、 P_1 と P_2 の **2型解消** を4つのフェンス型順序集合 $\{P_3, P_4, P_5, P_6\}$ として定める。ただし、 P_3, P_4, P_5, P_6 は次で定める。

- P_3 を $P_1 \cup P_2$ 上の順序集合とし、誘導されるすべての順序関係に加えて $P_1(1) \succ P_2(1)$ を課す。
- P_4 を空集合とする。
- $h_1 := |P_1|$ とおく。 v を、存在するならば $v > 1$ かつ $P_1(1) \not\succeq P_1(v)$ を満たす最小の整数とし、存在しなければ $v = h_1 + 1$ とする。 P_5 を $v \leq h_1$ のとき P_1 の部分順序集合 $P_1[v, h_1]$ 、 $v = h_1 + 1$ のとき空集合とする。
- $h_2 := |P_2|$ とおく。 u を、存在するならば $u > 1$ かつ $P_2(1) \not\succeq P_2(u)$ を満たす最小の整数とし、存在しなければ $u = h_2 + 1$ とする。 P_6 を $u \leq h_2$ のとき P_2 の部分順序集合 $P_2[u, h_2]$ 、 $u = h_2 + 1$ のとき空集合とする。

定理 6.2.11. フェンス型順序集合 P_1 と P_2 に対してその2型解消を $\{P_3, P_4, P_5, P_6\}$ とする。このとき次が成立する：

$$N(P_1)N(P_2) = N(P_3)N(P_4) + N(P_5)N(P_6). \quad (6.2.3)$$

証明. 全単射 $\mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2) \rightarrow (\mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)) \sqcup (\mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6))$ を構成すれば、両辺の元の個数の比較によって等式が成り立つことがわかる。まず $\mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2) = A \sqcup B$ と分割する。ただし

$$\begin{aligned} A &= \{(I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2) \mid P_1(1) \in I_1 \Rightarrow P_2(1) \in I_2\} \\ B &= \{(I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2) \mid P_1(1) \in I_1 \text{ かつ } P_2(1) \notin I_2\} \end{aligned}$$

とする。 $\Phi_1: A \rightarrow \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)$ を定める。任意の順序イデアルのペア $(I_1, I_2) \in A$ に対して $(I_3, I_4) \in \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)$ を次で与える。 $I_4 = \emptyset$ とし、

$$x \in I_3 \iff x \text{ に対応する } P_1 \text{ または } P_2 \text{ の元が } I_1 \text{ または } I_2 \text{ に属する}$$

このとき、 I_3 と I_4 は集合 A の条件からそれぞれ P_3, P_4 の順序イデアルである。これを用いて $\Phi_1(I_1, I_2) = (I_3, I_4)$ で $\Phi_1: A \rightarrow \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)$ を定義する。

同様に、 $\Phi_2: B \rightarrow \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)$ を定める。任意の順序イデアルのペア $(I_1, I_2) \in B$ に対して $(I_5, I_6) \in \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)$ を次で与える。

$$\begin{aligned} x \in I_5 &\iff x \text{ に対応する } P_1 \text{ の元が } I_1 \text{ に属する} \\ y \in I_6 &\iff y \text{ に対応する } P_2 \text{ の元が } I_2 \text{ に属する} \end{aligned}$$

このとき、 I_5 と I_6 は集合 B の条件からそれぞれ P_5, P_6 の順序イデアルである。これを用いて $\Phi_2(I_1, I_2) = (I_5, I_6)$ で $\Phi_2: B \rightarrow \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)$ を定義する。以上から $A \sqcup B$ で $(\mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)) \sqcup (\mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6))$ への写像 $\Phi := \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ が定まった。これが全単射であることを示す。

そのために、逆写像 Ψ を構成しよう。任意の順序イデアルのペア $(I_3, I_4) \in \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)$ に対して $(I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2)$ を次で与える。

$$\begin{aligned} P_1(j) \in I_1 &: \iff P_3(1, j) \in I_3 \\ P_2(j) \in I_2 &: \iff P_3(2, j) \in I_3 \end{aligned}$$

このとき、 I_1 と I_2 はそれぞれ P_1, P_2 の順序イデアルである。これを用いて $\Psi_1(I_3, I_4) = (I_1, I_2)$ で $\Psi_1: \mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4) \rightarrow \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2)$ を定義する。このとき特に、 Ψ_1 の定め方から $\Psi_1(\mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)) \subset A$ であることが確かめられる。

同様に、 $\Psi_2: \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6) \rightarrow B$ を定める。ここで $\langle P_1(1) \rangle$ は $P_1(1)$ によって生成される主順序イデアル、すなわち

$$\{x \in P_1 \mid x \preceq P_1(1)\}$$

を表す。任意の順序イデアルのペア $(I_5, I_6) \in \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)$ に対して $(I_1, I_2) \in \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2)$ を次で与える。

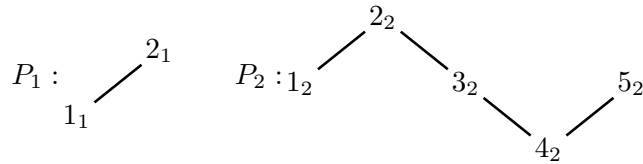
$$\begin{aligned} P_1(j) \in I_1 &: \iff P_1(j) \in \langle P_1(1) \rangle \text{ または } P_5(1, j) \in I_5 \\ P_2(j) \in I_2 &: \iff P_6(j) \in I_6 \end{aligned}$$

このとき、 I_1 と I_2 はそれぞれ P_1, P_2 の順序イデアルである。これを用いて $\Psi_2(I_5, I_6) = (I_1, I_2)$ で $\Psi_2: \mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6) \rightarrow \mathcal{J}(P_1) \times \mathcal{J}(P_2)$ を定義する。このときとくに、 Ψ_2 の定め方から $\Psi_2(\mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)) \subset B$ であることが確かめられる。以上から $\Psi := \Psi_1 \sqcup \Psi_2: (\mathcal{J}(P_3) \times \mathcal{J}(P_4)) \sqcup (\mathcal{J}(P_5) \times \mathcal{J}(P_6)) \rightarrow A \sqcup B$ が定まった。 Φ と Ψ が互いに逆写像であることは対応を追いかければわかる。以上から示された。 \square

例 6.2.12. $P_1 := P_{(2,1)}$, $P_2 := P_{(2,2)}$ とおき、

$$R_1 := P_1[2, 2], \quad R_2 := P_2[1, 1]$$

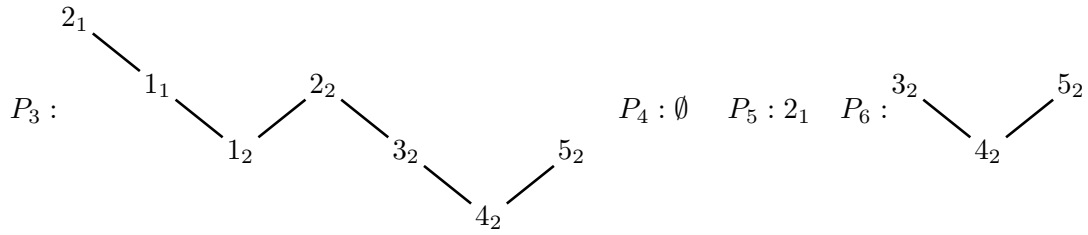
を考える。このとき、 P_1, P_2 のハッセ図は次のようになる：



このとき、 $P_1(1) \not\asymp P_1(v)$ を満たす最小の $v > 1$ は $v = 2$ であり、また $P_2(1) \not\asymp P_2(u)$ を満たす最小の $u > 1$ は $u = 3$ である。よって、2 型解消 $\{P_3, P_4, P_5, P_6\}$ は

$$\begin{aligned} P_3 &: P_1 \cup P_2 \text{ に } P_1(1) \succ P_2(1) \text{ を課したもの,} \\ P_4 &:= \emptyset, \\ P_5 &:= P_1[2, 2], \\ P_6 &:= P_2[3, 5] \end{aligned}$$

であるから、ハッセ図は以下のようなになる。



したがって

$$N(P_1) = N(2, 1) = 3, \quad N(P_2) = N(2, 2, 2) = 12, \quad N(P_3) = N(3, 1, 2, 2) = 26,$$

$$N(P_4) = 1, \quad N(P_5) = N(1, 1) = 2, \quad N(P_6) = N(2, 2) = 5$$

となる。よって

$$N(P_1)N(P_2) = 3 \cdot 12 = 36 = 26 \cdot 1 + 2 \cdot 5 = N(P_3)N(P_4) + N(P_5)N(P_6)$$

となり、たしかに定理 6.2.11 の等式が成り立つ。

等式 (6.2.1), (6.2.2), (6.2.3) はすべて同じ形をしているが、これらをまとめてスケイン関係式と呼ぶ。次の節で \mathbb{R}^2 上の曲線とフェンス型順序集合を対応させるが、この対応において P_1 と P_2 に対応する曲線は交差しており、 P_3, P_4, P_5, P_6 がこの交差を（結び目の意味での）スケイン関係式によって解消するときに出てくる 4 つの曲線に対応しているため、この名前がついている（詳細は次節で述べる）。

6.3 曲線の一般化マルコフ長と一般化マルコフ距離

$(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ および $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ を固定する。まず、 \mathbb{R}^2 上の次の (1)~(4) で与えられる場所に点を配置する：

- (1) すべての格子点 $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$
- (2) $k_{\sigma(1)} \neq 0$ ならば、任意の $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ を用いて $(\frac{a}{2}, b)$ と表される点
- (3) $k_{\sigma(2)} \neq 0$ ならば、任意の $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ を用いて $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ と表される点
- (4) $k_{\sigma(3)} \neq 0$ ならば、任意の $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ を用いて $(a, \frac{b}{2})$ と表される点

さらに、格子点を通る傾き $0, -1, \infty$ の直線をすべて考え、これによって \mathbb{R}^2 を三角形に分割する。このようにして得られる三角形分割された点付き平面を $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ とかくことにする。 $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の辺とは、 $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ の三角形分割を構成する直線のうち、 $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ の点から次の点までの区間のことを指すこととする。ここでの辺は、三角形分割を構成する最小の三角形の 1 辺とは限らず、中点を境に 2 つに分断されている場合があることに注意せよ。

γ を $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上に両方の端点を持つ $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の曲線（このような曲線を、以下単に**曲線片**という）とする。本稿では、曲線片 γ は次の条件を満たすと仮定する：

- γ の内部は $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ の点を通らない。
- γ が $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ の辺と交わる時は共有部分が一点であり、また横断する（別の三角形に移る）。
- γ は自己交差を有限個しかもたない。

この節では曲線片の中でも両端点が $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の格子点（すなわち \mathbb{Z}^2 に属する点）に一致しているもの

を扱う。

定義 6.3.1. γ を \mathbb{R}^2 内の曲線片とする。 γ の両端点が格子点であり、かつ γ が \mathbb{R}^2 の同じ辺と連続して二度交わらないとき、 γ を一般弧と呼ぶ。

この一般弧 γ から有限数列を構成することを考えよう。そのためにまず、 γ を通る \mathbb{R}^2 上の三角形と辺に符号 $\{+, -\}$ を対応させる次の操作を考える。

定義 6.3.2. γ を \mathbb{R}^2 上の向き付けられた一般弧とする。

- (1) γ の端点が格子点であるとき、この格子点を一つの頂点にもつ三角形で、かつ γ がその頂点に向向する (三角形の) 辺と交わるものに対し、符号 $(-)$ または $(+)$ を割り当てる (図 6.1 参照)。対向する辺以外の辺と交わる場合は符号を振らない。この規則を γ の端点規則と呼ぶ。

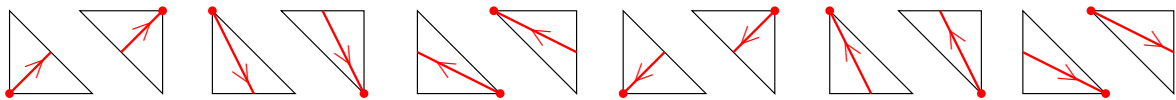


図 6.1 $-$ または $+$ を割り当てる直角三角形

なお割り当てる符号は各三角形に対して $-$, $+$ のどちらであってもよい (どちらでものちの議論に影響しないことに注 6.3.5 で言及する)。

- (2) γ と交わる \mathbb{R}^2 内の各三角形に対し、次の規則により $\{+, -\}$ の符号を割り当てる：
 (i) γ で切断したときに得られる左側の部分が四角形になる三角形には符号 $(-)$ を割り当てる (図 6.2 参照)。

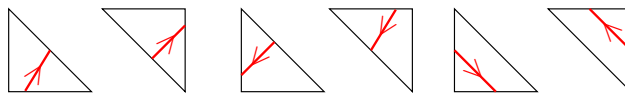


図 6.2 $-$ を割り当てる直角三角形

- (ii) それ以外のすべての三角形には符号 $(+)$ を割り当てる (図 6.3 参照)。

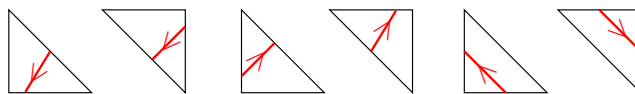


図 6.3 $+$ を割り当てる直角三角形

この規則を γ の三角形横断規則と呼ぶ。

- (3) γ の内部と交わる三角形に含まれる各辺に対し、次の規則で符号を割り当てる：
 (i) 各水平辺 (対角辺、垂直辺) について、その中点が γ の左側に位置するとき、 $k_{\sigma(1)}$ 個 ($k_{\sigma(2)}$ 個、 $k_{\sigma(3)}$ 個) のマイナス符号 $(-)$ を割り当てる (図 6.4 参照)。

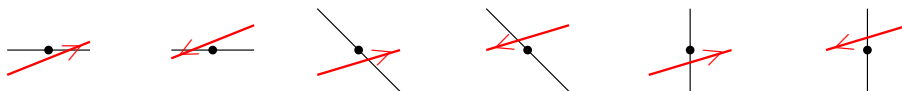


図 6.4 $-$ を割り当てる辺

- (ii) 各水平辺（対角辺、垂直辺）について、その中点が γ の右側に位置するとき、 $k_{\sigma(1)}$ 個（ $k_{\sigma(2)}$ 個、 $k_{\sigma(3)}$ 個）のプラス符号 (+) を割り当てる（図 6.5 参照）。

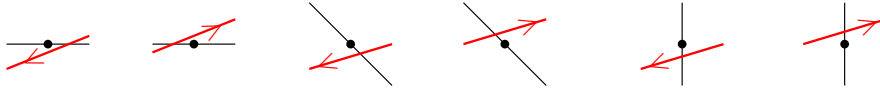


図 6.5 + を割り当てる辺

- (iii) 辺を通過した後三角形を通過せずすぐ隣の辺を通過するケース（図 6.6, 6.7）では例外的に、この 2 つの辺に割り当てる符号の種類 {+, -} を (i),(ii) のルールに従って決定し（このとき 2 つの辺に対する符号の種類は同じである）、これらの符号を 2 つの辺が水平辺（対角辺、垂直辺）の場合にそれぞれ $k_{\sigma(1)} - 1$ 個（ $k_{\sigma(2)} - 1$ 個、 $k_{\sigma(3)} - 1$ 個）ずつ割り当て、さらに 2 つの辺が共有する点にそれらの符号と異なる符号を 1 個割り当てる。なお $k_{\sigma(i)} = 0$ ならば対応する辺の中点は \mathbb{R}^2 上の点ではないため、同じ辺に続けて交わらないという一般弧の定義からこの状況はそもそも起こり得ないことに注意せよ。

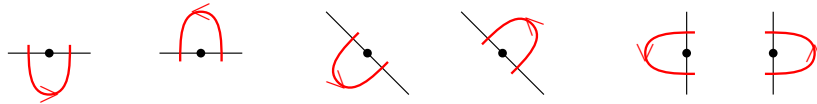


図 6.6 例外処理 (-+- 型)

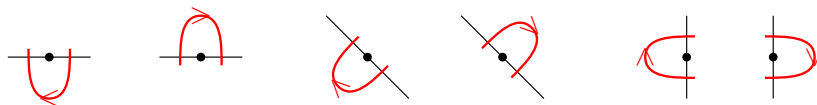


図 6.7 例外処理 (+-+ 型)

この規則を (k_1, k_2, k_3, σ) に対する γ の**辺横断規則**と呼ぶ。

$(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ および $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ を固定し、 γ を一般弧とする。次の手順により符号列 $s(\gamma)$ を定義する：

- (1) 端点規則、三角形横断規則、辺横断規則により三角形と辺に割り当てられた符号を γ が通過する順に並べる（辺横断規則の (iii) で付けられた点に対する符号は、その点につながっている辺に付随する符号の間に挟む）。
- (2) (1) で得られた符号列において、同じ符号が連続して現れる回数から整数列 (a_0, \dots, a_n) を構成する。この列を γ に**付随する符号列**と呼び、 $s(\gamma)$ で表す。

$s(\gamma) = (a_0, \dots, a_n)$ とするとき、さらにフェンス型順序集合 P_γ を次で定義する：

- P_γ の台集合を $\{1, 2, \dots, \sum_{i=0}^n a_i - 1\}$ とする。
- γ の端点（出発点）から順番に数えて $i + 1$ 番目にある符号が + のとき $i < i + 1$, - のとき $i > i + 1$ （ただし $1 \leq i \leq \sum_{i=0}^n a_i - 2$ である）

ここで、定義から一番最初と一番最後の符号は P_γ の順序構造の決定に使用されないことに注意せよ。

P_γ の順序イデアルの個数を γ の (k_1, k_2, k_3, σ) 一般化マルコフ (GM) 長と呼び、 $|\gamma|$ で表す。記号で明記はしていないが、 $s(\gamma)$ および $|\gamma|$ は最初にとった $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に依存する概念であることに注意せよ。 $P_{(a_0, \dots, a_n)}$ と P_γ の定義を比較することで、次の命題は直ちに従う。

命題 6.3.3. $s(\gamma) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ とするとき、 P_γ は $P_{(a_0, \dots, a_n)}$ または $P_{(a_0, \dots, a_n)}^*$ に順序集合として同型である。ただし、 P^* は P の順序を反転させた順序集合とする。とくに $|\gamma| = N(a_0, \dots, a_n)$ が成り立つ。

例 6.3.4. $(k_1, k_2, k_3, \sigma) = (1, 2, 0, \text{id})$ とする。図 6.8 に示す赤い向き付けられた一般弧 γ に対し、

$$s(\gamma) = (3, 7, 1, 6, 2, 1, 3, 1, 2, 2, 6, 5),$$

であり、定理 6.1.6 を使って計算することで $|\gamma| = 551409$ を得る。

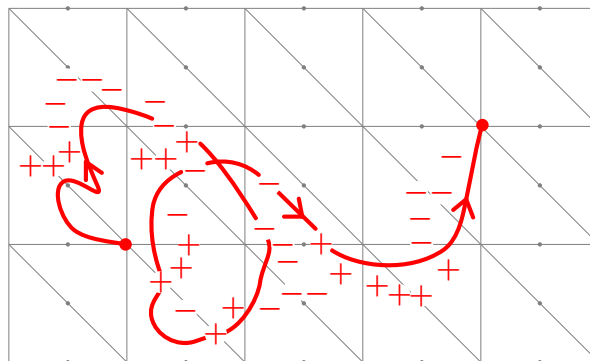


図 6.8 一般弧 γ と割り当てられた符号

注 6.3.5. 命題 6.1.9 (1) から、 $|\gamma|$ の値は γ に設定した向きに依存しない。また命題 6.1.9 (2) から、 $|\gamma|$ の値は端点規則によって定まる符号に依存しない。

$\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 内の任意の二つの格子点 A, B に対し、 (k_1, k_2, k_3, σ) 一般化マルコフ距離を定義する。

定義 6.3.6. 任意の格子点 A, B に対して、

$$\Gamma := \{ \gamma \mid \gamma \text{ は } A \text{ と } B \text{ を結ぶ一般弧} \}$$

と定める。 $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ を取り固定する。このとき、

$$d(A, B) := \begin{cases} \min_{\gamma \in \Gamma} |\gamma| & (A \neq B) \\ 0 & (A = B) \end{cases}$$

を A と B の間の (k_1, k_2, k_3, σ) 一般化マルコフ (GM) 距離^{*1}と呼ぶ。

この節の目標は、この GM 距離を与える曲線片がどのようなものであるかを具体的に与え、それを証明することである。以下、GM 距離を与える曲線片をどのように定めるかを述べる。 γ_{AB}^R を、 A から B への直線分の内部を右にわずかに平行移動して、線分上の点を避けるようにして得られる一般弧とする。同様に、 γ_{AB}^L を、 A から B への直線分の内部を左にわずかに平行移動して、線分

*1 「距離」という名前がついているものの、距離の公理のうち三角不等式を満たさないで距離ではない。

上の点を避けるようにして得られる一般弧とする。ただしここでいう「わずかに」とは、「点を避けた部分以外の $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上のすべての三角形、辺による曲線の符号規則が変化しない程度に少し」という意味である (図 6.9 参照)。この節の残りで次の定理を示す。

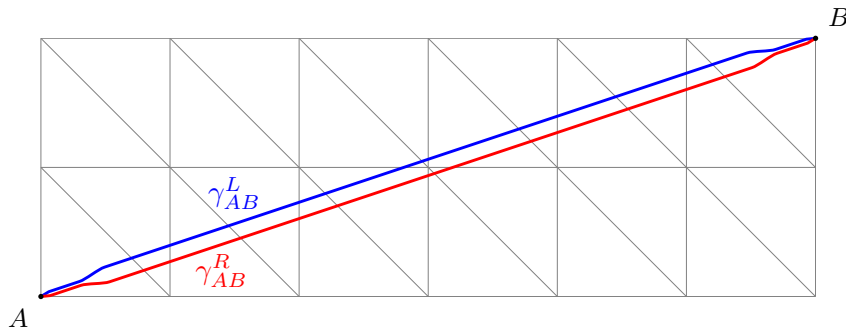


図 6.9 γ_{AB}^R と γ_{AB}^L

定理 6.3.7. A, B を $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ における格子点とし、 $A \neq B$ とする。このとき、

$$d(A, B) = |\gamma_{AB}^R| = |\gamma_{AB}^L|$$

が成り立つ。

まず先に 2 つ目の等式だけ示しておく。

補題 6.3.8. 任意の $A, B \in \mathbb{Z}^2$ に対して $|\gamma_{AB}^R| = |\gamma_{AB}^L|$ が成立する。

証明. γ_{AB}^R は、向きを反転させた γ_{BA}^L と同じ符号列を与える。符号規則は $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ における絶対的な位置ではなく、曲線の向きに対して定まる相対的なものなので、 $s(\gamma_{AB}^R) = s(\gamma_{BA}^L)$ が成り立ち、したがって $|\gamma_{AB}^R| = |\gamma_{BA}^L|$ である。また注 6.3.5 から $|\gamma_{AB}^L| = |\gamma_{BA}^L|$ が成り立つ。以上から示された。 □

補題 6.3.9. $A = (p, q), B = (s, r), A' = (0, 0), B' = (s - p, r - q)$ とする。このとき、

$$d(A, B) = d(A', B')$$

が成り立つ。

証明. 一般弧の符号規則は、端点となる格子点の絶対的な位置には依存しない。したがって、端点が格子点から格子点へ移るような平行移動によって曲線片の GM 長は保たれる。したがってその下限も保たれることにより、主張が成り立つ。 □

次に、GM 距離を与える曲線は自己交差を持たないことを示す。

補題 6.3.10. A と B を端点にもつ一般弧 γ が可縮でない自己交差を持つとき、 $|\gamma| > d(A, B)$ が成り立つ。

証明. 主張は $A = B$ のとき自明である。以下では A と B は異なると仮定する。

γ を自己交差をもつ一般弧とし、その自己交差点を C とする。 γ は C を 2 回通るので γ を 3 つの曲線片 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ に分割できる。すなわち γ が最初に C を通るまでの部分を γ_1 、2 回の通過の間の

部分を γ_2 、最後に C を通った後の部分を γ_3 とする。特にそれぞれに γ から誘導される向きを入れると γ_1 は A から始まり γ_3 は B で終わる。

γ' を、 γ_1 と γ_3 を連結したのちに、同じ辺を2度通る場合にその部分をカットして結合するという操作 (図 6.10) を繰り返して短縮することで得られる一般弧とする。このとき γ_1 と $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ の辺の交点

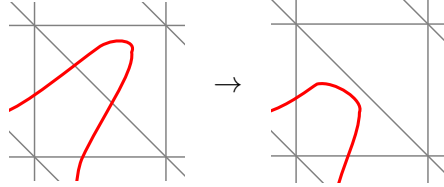


図 6.10 切断と結合 (中央の対角線の中点が \mathbb{R}^2 の点でないケース)

の位置および γ_3 と辺の交点の位置は保たれるようにする。 γ' と $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ の辺との交点のうち、 γ_1 に含まれていて端点 A から (曲線に沿って) 一番遠いものを p_1 、 γ_3 に含まれていて B から最も遠いものを p_3 とする。この p_1 と p_3 が含まれる $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の三角形を Δ とする。まず、 Δ が γ の端点を含む三角形でない場合を考える。以下図 6.11 に γ と γ' の局所配置の例を挙げる (γ' は直角部分を横切っているとは限らないが、いずれの場合もこの後の議論は同様である)。 $h = |P_\gamma|$ とおく。 γ' の構成の仕方

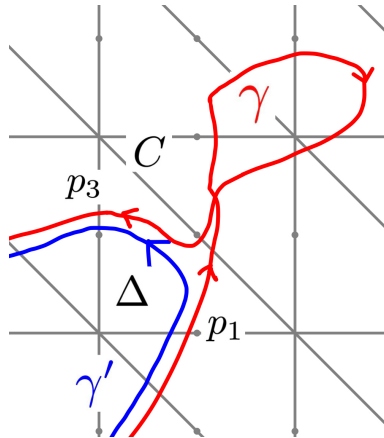


図 6.11 局所配置の例

よりある $u < v$ が存在して $P_{\gamma'}$ は $P_\gamma[1, u] \cup P_\gamma[v, h]$ 上の誘導部分順序を取りさらに $P_\gamma(u)$ と $P_\gamma(v)$ の間に辺を1本付け加えることで得られる。上の図の向き (したがって γ' に誘導される向き) を仮定すると対応する P_γ と $P_{\gamma'}$ は次の図のように表される。記法の濫用として $P_{\gamma'}$ の要素を指すときも P_γ の整数ラベルをそのまま用いることにする。

さて、 $|\gamma| > |\gamma'|$ を示す。これは $\mathcal{J}(P_{\gamma'})$ から $\mathcal{J}(P_\gamma)$ への単射で全射でないものを与えればよい。

任意の順序イデアル $I' \in \mathcal{J}(P_{\gamma'})$ に対して次の対応で P_γ の順序イデアル I を構成する： $x \in [1, u - 1] \cup [v + 1, h]$ に対して

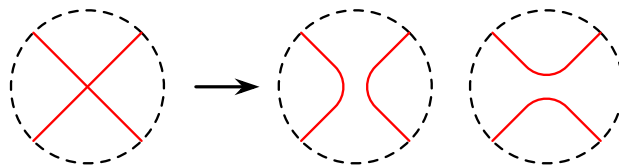
$$P_{\gamma'}(x) \in I' \Leftrightarrow P_\gamma(x) \in I$$

であり、

$$\begin{aligned} P_{\gamma'}(u) \notin I' &\Rightarrow P_\gamma(u) \notin I, & P_{\gamma'}(u) \in I' &\Rightarrow \langle P_\gamma(u) \rangle \subset I, \\ P_{\gamma'}(v) \notin I' &\Rightarrow P_\gamma(v) \notin I, & P_{\gamma'}(v) \in I' &\Rightarrow \langle P_\gamma(v) \rangle \subset I, \end{aligned}$$

さらに上記以外の $x \in [u+1, v-1]$ に対しては $P_\gamma(x) \notin I$ であるとする。このとき、この対応 $I' \mapsto I$ は単射 $\mathcal{J}(P_{\gamma'}) \rightarrow \mathcal{J}(P_\gamma)$ を与える。この単射を Φ で表すことにする。この写像が全射でないことを確かめれば良い。まず $u \notin \langle P_\gamma(v) \rangle$ または $v \notin \langle P_\gamma(u) \rangle$ の場合を考える。このとき、 $P_\gamma[u+1, v-1]$ の中に P_γ の極小元または極大元が必ず存在する。この点を $P_\gamma(w)$ とすると、 $\langle P_\gamma(w) \rangle$ は P_γ の順序イデアルであり、 $\Phi^{-1}(\langle P_\gamma(w) \rangle) = \emptyset$ なので Φ が全射でないことが示される。次に、 $u \in \langle P_\gamma(v) \rangle$ または $v \in \langle P_\gamma(u) \rangle$ のときを考える。 $u \in \langle P_\gamma(v) \rangle$ のとき、 P_γ の順序イデアル $\langle P_\gamma(u+1) \rangle$ に対して $\Phi^{-1}(\langle P_\gamma(u+1) \rangle) = \emptyset$ が成立する。同様に、 $v \in \langle P_\gamma(u) \rangle$ のとき、 P_γ の順序イデアル $\langle P_\gamma(v-1) \rangle$ に対して $\Phi^{-1}(\langle P_\gamma(v-1) \rangle) = \emptyset$ が成立する。したがっていずれの場合も Φ は全射ではない。以上から示された。 C が Δ が最初の三角形となる場合や最後となる場合も同様の方法で Φ を定めて全射性の破綻を確認すれば良い。以上から $|\gamma| > |\gamma'| \geq d(A, B)$ となり、示したかった不等式が従う。 \square

上記の補題から、GM 距離を与える弧は少なくとも自己交差を持たないことがわかる。さて、定理 6.3.7 を示すにあたって重要な鍵となるのが **スケイン解消** の考え方である。これは元々は結び目の不変量を再帰的に定義するときなどに使われる技法であり、曲線の交差部分を曲線片のペア 2 つに置き換えて、交差を持つ曲線を「等価である」交差を持たない曲線の集合に置き換える操作のことを指す。具体的には曲線の局所的な交差に対して次の 2 つの解消を考える。



本稿では 2 本の曲線の（自己交差ではない）交差に関して上記のスケイン解消を行う。このとき、この 2 本の曲線からそれぞれの解消に関して新たに 2 本、合計 4 本の曲線が与えられる。

本稿では曲線の GM 長を考える都合上、スケイン解消した後の曲線が一般弧でない場合は適切にホモトピックなものを取り直して一般弧を考える必要がある。一般弧とならないのは \mathbb{R}^2 上の辺を 2 回続けて通るケースであり、これを図 6.10 に示す切断と結合の操作を繰り返し使ってホモトピックな一般弧を与える。次の定理は、曲線の GM 長がこのスケイン解消によって与えられるスケイン関係式を満たすことを主張する。

定理 6.3.11. 最小交差配置で交差する $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の一般弧 γ_1, γ_2 に対して、交差点 C を 1 つ指定して、その交差をスケイン解消することによって生まれる 4 つの一般弧を $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ とする。ここで、 γ_3 は γ_1 の始点から出発して γ_2 の終点につながる曲線、 γ_4 は γ_2 の始点から出発して γ_1 の終点につながる曲線、 γ_5 は γ_1 の始点から出発して γ_2 の始点につながる曲線、 γ_6 は γ_1 の終点から出発して γ_2 の終点につながる曲線であるとする。このとき、任意の $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に対して

$$|\gamma_1||\gamma_2| = |\gamma_3||\gamma_4| + |\gamma_5||\gamma_6|$$

が成り立つ。

証明. γ_1, γ_2 の交点 C がある $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の三角形または辺を考える。交点 C はホモトピックを適切に取り替えることで異なる三角形や辺の間を移動できる場合と、そうでない場合がある（後者の場合、交点 C は必ず三角形上に存在する）。

まず前者の場合を考える。このとき、 γ_1 と γ_2 には通り方が同じ三角形や辺による「並走区間」で

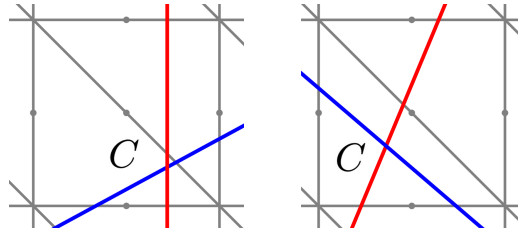


図 6.12 移動可能な交点 (左) と移動可能でない交点 (右)

交点 C を含むようなものが存在する。そこで、 γ_1 と γ_2 の向きをこの並走区間を同じ向きで走るよう
に向きを定め、フェンス型順序集合 $P_{\gamma_1}, P_{\gamma_2}$ を考える。 P_{γ_1} における、並走区間全体に付随する符号
列に対応する大小関係で比較されている頂点全体がなす部分順序集合を $P_{\gamma_1}[c, d]$ 、 P_{γ_2} における同様
の部分順序集合を $P_{\gamma_2}[c', d']$ とする。このとき、 $P_{\gamma_1}[c, d] \cong P_{\gamma_2}[c', d']$ であり、 $P_{\gamma_1}(c-1) < P_{\gamma_1}(c)$
であることと $P_{\gamma_2}(c'-1) > P_{\gamma_2}(c')$ が同値である。実際、そうでなければ並走区間は延長されて
 $P_{\gamma_1}[c-1, d] \cong P_{\gamma_2}[c'-1, d']$ であることになってしまう。また同様に $P_{\gamma_1}(d) < P_{\gamma_1}(d+1)$ と
 $P_{\gamma_2}(d') > P_{\gamma_2}(d'+1)$ が同値である。さらに、 $P_{\gamma_1}(c-1) < P_{\gamma_1}(c)$ と $P_{\gamma_1}(d) > P_{\gamma_1}(d+1)$ も同値で
ある。これは γ_1 と γ_2 の左右の位置関係が並走区間の入口と出口で逆転するからであり、実際そうで
なければ γ_1 と γ_2 は並走区間で交わらないことになってしまう。以上から、 P_{γ_1} と P_{γ_2} は $P_{\gamma_1}[c, d]$
と $P_{\gamma_2}[c', d']$ で交差重複していることがわかる。並走区間に対応する部分順序集合が上に閉じている
曲線を γ_1 、下に閉じている曲線を γ_2 であるとすると、 $P_1 = P_{\gamma_1}, P_2 = P_{\gamma_2}$ として 0 型解消のスケイ
ン関係式 (6.2.1) を適用することができる。 γ_1 と γ_2 に入っている向きに沿って途中の交点で繋ぎか
えてできる解消対のうち γ_1 の始点を含む曲線を γ_3 、 γ_2 の始点を含む曲線を γ_4 とすると、 P_3, P_4 の
構成方法から (6.2.1) において $P_3 = P_{\gamma_3}, P_4 = P_{\gamma_4}$ となり、もう片方の解消対のうち γ_1 の始点を含
む曲線を γ_5 、 γ_1 の終点を含む曲線を γ_6 とすると (6.2.1) において $P_5 = P_{\gamma_5}, P_6 = P_{\gamma_6}$ となる。い
ま命題 6.3.3 から $N(P_{\gamma_i}) = |\gamma_i|$ なので主張が成り立つことが示された。

次に交点 C が 1 つの三角形上にあって動かさない場合を考える。次の 3 通りの場合を考える：

- (1) C が γ_1 における最初または最後の三角形上にあり、 γ_2 の途中の三角形にある
- (2) C が γ_1 と γ_2 における最初または最後の三角形上にある
- (3) (1),(2) 以外

なお、 C が γ_2 における最初または最後の三角形上にあり、 γ_1 の途中の三角形にある場合は γ_1 と γ_2
の役割を入れ替えることで (1) に帰着できる。

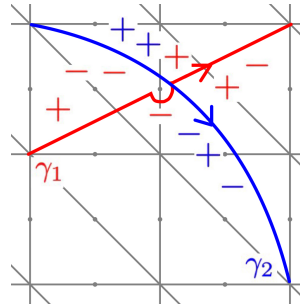
(1) の場合、 γ_2 の向きを適切に変えることで γ_2 の符号規則により C が含まれる三角形に割り当て
られる符号を $-$ にすることができる。 P_{γ_2} においてこの符号 $-$ によって順序が与えられる 2 つの頂
点を $i, i+1$ とする。 $P_{\gamma_1} = P_1, P_{\gamma_2} = P_2$ として、この i に対して 1 型解消を適用すると定理 6.2.8
から主張を得る。

(2) の場合、 γ_1, γ_2 の向きを交点 C が存在する三角形にある端点を始点とするように定め、2 型解
消を適用することで定理 6.2.11 から主張を得る。

(3) の場合は C を含む三角形の 3 辺のうち、 γ_1 と γ_2 の両方が交差している 1 辺が必ず存在する。
この三角形の辺を ℓ とすると、この辺の中点はかならず \mathbb{R}^2 上の点であり、中点を挟んで分割されて
いる \mathbb{R}^2 の 2 辺をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 とすると、 γ_1, γ_2 はこの 2 つのどちらかと交わっており、またどち

らも同じ辺と交わっていることがない。そこで γ_1 が l_1 と、 γ_2 が l_2 と交わっていると仮定して良い (そうでなければ l_1 と l_2 を入れ替えれば仮定を満たすことができる)。 γ_1 と γ_2 の向きを l_1 または l_2 を通ってから交点 C を通過するように設定すると、 P_1 上で l_1 の符号と C を含む三角形の符号の両方で隣接する頂点との大小関係が決定される元 $c_1 \in P_1$ 、 P_2 上で l_2 の符号と C を含む三角形の符号の両方で隣接する頂点との大小関係が決定される元 $c_2 \in P_2$ で交差重複していることがわかる。ここに 0 型解消のスケイン関係式 (6.2.1) を適用して主張が示される。 \square

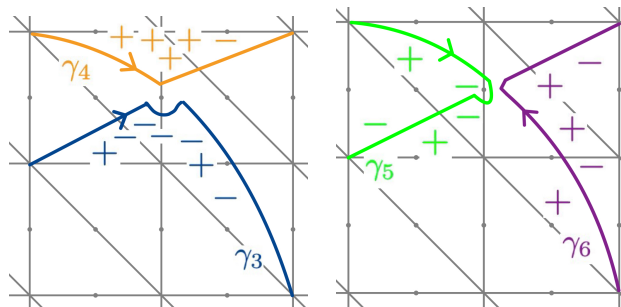
例 6.3.12. 実際にスケイン関係式が成り立つ例を見てみよう。 $(k_1, k_2, k_3) = (1, 1, 1)$ として (対称型なので σ はなんでもよい) 以下のように γ_1, γ_2 を与える。



このとき

$$|\gamma_1| = N(1, 3, 2, 1) = 13, \quad |\gamma_2| = N(2, 1, 1, 1) = 8$$

である。これをスケイン解消することにより、以下の $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ を得る。



このとき

$$|\gamma_3| = N(1, 4, 1, 1) = 11, \quad |\gamma_4| = N(4, 1) = 5, \quad |\gamma_5| = N(1, 2, 1, 1) = 7, \quad |\gamma_6| = N(1, 1, 2, 1) = 7$$

が成り立つ (γ_5 の辺上の符号に例外処理が含まれていることに注意せよ)。このとき

$$|\gamma_1||\gamma_2| = 13 \cdot 8 = 104, \quad |\gamma_3||\gamma_4| + |\gamma_5||\gamma_6| = 11 \cdot 5 + 7 \cdot 7 = 55 + 49 = 104$$

なので

$$|\gamma_1||\gamma_2| = |\gamma_3||\gamma_4| + |\gamma_5||\gamma_6|$$

が確かに成り立っている。

更なる補題を準備するために、曲線 $\gamma_{AB}^{RL}, \gamma_{AB}^{LR}$ を導入する。 A, B の中点を M とする。 γ_{AB}^{RL} を A と B を結ぶ一般弧であり、 A から出発して、 M を通過した直後まで γ_{AB}^R と同じ曲線で、それ以降は γ_{AB}^L と同じ曲線となって B に到着するものであるとする。また、 γ_{AB}^{LR} を A と B を結ぶ一般弧で

あり、 γ_{AB}^{RL} とは逆に、 A から出発して、直線 AB の中点を通過した直後まで γ_{AB}^L と同じ曲線で、それ以降は γ_{AB}^R と同じ曲線となって B に到着するものであるとする (図 6.13 参照)。

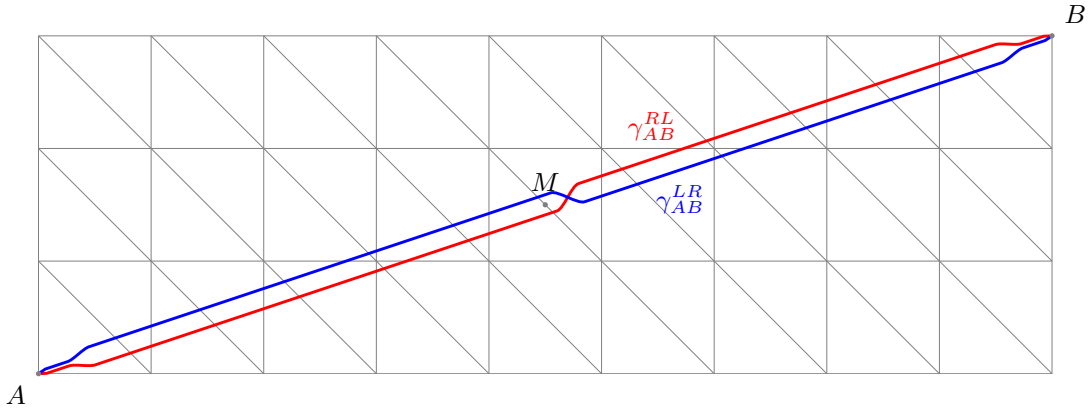


図 6.13 γ_{AB}^{RL} と γ_{AB}^{LR}

補題 6.3.13. A, B を相異なる格子点とし、 A, B の中点を M としたとき、 M が格子点でないとする。 $|\gamma_{AB}^{RL}| = |\gamma_{AB}^{LR}|$ が成立する。

証明. 線分 AB の内部に \mathbb{R}^2 の点が存在しない場合、 $\gamma_{AB}^{RL}, \gamma_{AB}^{LR}, \gamma_{AB}^R, \gamma_{AB}^L$ はすべて互いにホモトピックなので $|\gamma_{AB}^{RL}| = |\gamma_{AB}^{LR}| = |\gamma_{AB}^R| = |\gamma_{AB}^L|$ である。また 1 つの場合も γ_{AB}^{RL} と γ_{AB}^R がホモトピックであり、 γ_{AB}^{LR} と γ_{AB}^L がホモトピックなので補題 6.3.8 から $|\gamma_{AB}^{RL}| = |\gamma_{AB}^{LR}|$ である。以下、線分 AB の内部に \mathbb{R}^2 の点が 2 つ以上存在することを仮定する。

A' を線分 AB 上の A の次に来る格子点であるとする。

まず $\gamma_{AA'}^R$ に付随する 2 番目の符号が $(-)$ である場合を考える。 $s(\gamma_{AA'}^R) = (a_0, \dots, a_n)$ であるとする。ここで、端点規則で付随する符号を A を含む三角形で $(-)$ 、 B を含む三角形で $(+)$ と取ることによって $a_0, a_n > 1$ となる。このとき、ある $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて

$$s(\gamma_{AB}^{RL}) = ((a_0, \dots, a_n - 1, 1, 2 + k_1 + k_2 + k_3)^m, a_0, \dots, a_n, (2 + k_1 + k_2 + k_3, 1, a_n - 1, \dots, a_0)^m)$$

とかける。ただし、 $(*)^m$ は括弧の中の列を m 回繰り返す意味で使用している。同様に

$$s(\gamma_{AB}^{LR}) = ((1, a_n - 1, \dots, a_0, 2 + k_1 + k_2 + k_3)^m, 1, a_n - 1, \dots, a_0 - 1, 1, (2 + k_1 + k_2 + k_3, a_0, \dots, a_n - 1, 1)^m)$$

となる。ここで $|\gamma_{AB}^{RL}|$ と $|\gamma_{AB}^{LR}|$ を計算するために対応する 2 つの行列積

$$S_{1,m} := (F_{a_0} \cdots F_{a_{n-1}} F_{a_n-1} F_1 F_{2+k_1+k_2+k_3})^m F_{a_0} \cdots F_{a_n} (F_{2+k_1+k_2+k_3} F_1 F_{a_n-1} F_{a_{n-1}} \cdots F_{a_0})^m,$$

$$S_{2,m} :=$$

$$(F_1 F_{a_n-1} F_{a_{n-1}} \cdots F_{a_0} F_{2+k_1+k_2+k_3})^m F_1 F_{a_n-1} F_{a_{n-1}} \cdots F_{a_1} F_{a_0-1} F_1 (F_{2+k_1+k_2+k_3} F_{a_0} \cdots F_{a_{n-1}} F_{a_n-1} F_1)^m$$

を計算して、その $(1, 1)$ 成分をみる。ただし、 $F_i := \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ である。系 6.1.8 と命題 6.3.3 からこれらが $|\gamma_{AB}^{RL}|$ と $|\gamma_{AB}^{LR}|$ を与えるので、以下任意の m に対して $S_{1,m} = S_{2,m}$ であることを示す。

$$P = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} := F_{a_1} F_{a_2} \cdots F_{a_{n-1}}$$

とすると、両辺転置を取ることで

$$P^T = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = F_{a_{n-1}} F_{a_{n-2}} \cdots F_{a_1}$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned} X &:= F_{a_0} P F_{a_{n-1}} F_1 F_{2+k_1+k_2+k_3}, & C &:= F_{a_0} P F_{a_n}, \\ V &:= F_{2+k_1+k_2+k_3} F_{a_0} P F_{a_{n-1}} F_1, & D &:= F_1 F_{a_0-1} P^T F_{a_{n-1}} F_1. \end{aligned}$$

とすると、 $S_{1,m}$ と $S_{2,m}$ はそれぞれ

$$S_{1,m} = X^m C (X^T)^m, \quad S_{2,m} = (V^T)^m D V^m \quad (6.3.1)$$

と書き換えられる。ここで、 $X = F_{2+k_1+k_2+k_3}^{-1} V F_{2+k_1+k_2+k_3}$ であるから

$$\operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr}(V), \quad \det(X) = \det(V)$$

が成り立つ。ケーリー・ハミルトンの定理 (系 A.2.2) から、任意の m に対して

$$X^2 = \tau X - \delta E_2, \quad V^2 = \tau V - \delta E_2$$

が成立する。ここで $\delta = \det(X) = \det(V)$, $\tau = \operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr}(V)$ である。これを繰り返し適用することにより、任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対して

$$X^m = \alpha_m X + \beta_m E_2, \quad V^m = \alpha_m V + \beta_m E_2$$

となる $\alpha_m, \beta_m \in \mathbb{Z}$ が存在する。転置行列に関しても同様に、

$$(X^T)^m = \alpha_m X^T + \beta_m E_2, \quad (V^T)^m = \alpha_m V^T + \beta_m E_2$$

が成り立つ。したがって、

$$S_{1,m} = (\alpha_m X + \beta_m E_2) C (\alpha_m X^T + \beta_m E_2), \quad S_{2,m} = (\alpha_m V^T + \beta_m E_2) D (\alpha_m V + \beta_m E_2)$$

である。これらを展開することで

$$\begin{aligned} S_{1,m} &= \alpha_m^2 X C X^T + \alpha_m \beta_m X C + \alpha_m \beta_m C X^T + \beta_m^2 C, \\ S_{2,m} &= \alpha_m^2 V^T D V + \alpha_m \beta_m V^T D + \alpha_m \beta_m D V + \beta_m^2 D \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、ある整数 u, v, w, u', v', w' が存在して

$$(S_{1,m})_{11} = u \alpha_m^2 + v \alpha_m \beta_m + w \beta_m^2, \quad (S_{2,m})_{11} = u' \alpha_m^2 + v' \alpha_m \beta_m + w' \beta_m^2, \quad (6.3.2)$$

とかける。また $X^{m+2} = \tau X^{m+1} - \delta X^m$ に

$$X^m = \alpha_m X + \beta_m E_2, \quad X^{m+1} = \alpha_{m+1} X + \beta_{m+1} E_2, \quad X^{m+2} = \alpha_{m+2} X + \beta_{m+2} E_2$$

を代入することで

$$(\alpha_{m+2} - \alpha_{m+1} \tau + \alpha_m \delta) X + (\beta_{m+2} - \beta_{m+1} \tau + \beta_m \delta) E_2 = 0$$

となる。ここで連分数行列の特性から $X_{21} \neq 0$ であるから X と E_2 は \mathbb{Q} 上一次独立であり、したがって

$$\alpha_{m+2} - \alpha_{m+1}\tau + \alpha_m\delta = 0, \quad \beta_{m+2} - \beta_{m+1}\tau + \beta_m\delta = 0 \quad (6.3.3)$$

が成立する。この漸化式の特性方程式 $t^2 - \tau t + \delta = 0$ を考える。ここで $\delta \in \{\pm 1\}$ であり、また X は連分数行列なので $\delta = 1, \tau = 2$ の場合は起こらない。したがってこの特性方程式は異なる実数解をもつ。これらを λ_1, λ_2 とすると、ある $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\alpha_m = a\lambda_1^m + b\lambda_2^m, \quad \beta_m = a'\lambda_1^m + b'\lambda_2^m,$$

と書くことができる（この理由は定理 A.3.1 を参照せよ）。これを (6.3.2) に代入することで、ある $h, i, j, h', i', j' \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(S_{1,m})_{11} = h\lambda_1^{2m} + i\lambda_1^m\lambda_2^m + j\lambda_2^{2m}, \quad (S_{2,m})_{11} = h'\lambda_1^{2m} + i'\lambda_1^m\lambda_2^m + j'\lambda_2^{2m}$$

と記述できる。 $(S_{1,m})_{11}, (S_{2,m})_{11}$ の一般項表示に対する特性方程式は

$$(t - \lambda_1^2)(t - \lambda_1\lambda_2)(t - \lambda_2^2) = 0$$

で与えられるので、これを展開することで

$$t^3 - (\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)t^2 + \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)t - \lambda_1^3\lambda_2^3 = 0$$

を得る。解と係数の関係から $\lambda_1\lambda_2 = \delta$ 、 $\lambda_1 + \lambda_2 = \tau$ なので、ここから $(S_{1,m})_{11}, (S_{2,m})_{11}$ が同じ 4 項間漸化式

$$\begin{aligned} (S_{1,m+3})_{11} &= (\tau^2 - \delta)(S_{1,m+2})_{11} - (\delta(\tau^2 - \delta))(S_{1,m+1})_{11} + \delta^3(S_{1,m})_{11} \\ (S_{2,m+3})_{11} &= (\tau^2 - \delta)(S_{2,m+2})_{11} - (\delta(\tau^2 - \delta))(S_{2,m+1})_{11} + \delta^3(S_{2,m})_{11} \end{aligned}$$

を満たすことがわかる。以上から、 $(S_{1,m})_{11} = (S_{2,m})_{11}$ は $m = 0, 1, 2$ のときのみ一致を確認すれば、後は上記の漸化式から任意の m で成立することがわかる。 $m = 0, 1, 2$ のときの一致は直接計算により確認できるので読者に任せることにする。

$\gamma_{AA'}^R$ に付随する 2 番目の符号が (+) である場合は $s(\gamma_{AB}^{LR})$ と $s(\gamma_{AB}^{RL})$ の表示が入れ替わるが、それ以外の議論は (-) の場合と並行に進むので同じようにして示される。□

補題 6.3.13 と同様の主張は M が格子点である場合も成立し、証明はより簡単に済む。

補題 6.3.14. A, B を格子点とし、 A, B の中点を M としたとき、 M が格子点であるとする。このとき $|\gamma_{AB}^{RL}| = |\gamma_{AB}^{LR}|$ が成立する。

証明. 補題 6.3.13 と同じ理由から、 AB の内部に格子点が 2 つ以上あると仮定する。 $s(\gamma_{AM}^R) = (a_1, \dots, a_n)$ (ただし端点規則により与えられる三角形上の符号を隣の符号と同じものとする) と表されるとしよう。

まず γ_{AM}^R に付随する 2 番目の符号が (-) である場合を考える。このとき、

$$\begin{aligned} s(\gamma_{AB}^{RL}) &= (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1, 2 + k_1 + k_2 + k_3, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1) \\ s(\gamma_{AB}^{LR}) &= (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, 2 + k_1 + k_2 + k_3, 1, a_1 - 1, a_2, a_3, \dots, a_n) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $|\gamma_{AB}^{RL}|$ と $|\gamma_{AB}^{LR}|$ を計算するために行列積

$$\begin{aligned} S_1 &:= F_{a_1} F_{a_2} \cdots F_{a_{n-1}} F_{a_{n-1}} F_1 F_{2+k_1+k_2+k_3} F_{a_n} F_{a_{n-1}} \cdots F_{a_1} \\ S_2 &:= F_{a_n} F_{a_{n-1}} \cdots F_{a_1} F_{2+k_1+k_2+k_3} F_1 F_{a_1-1} F_{a_2} F_{a_3} \cdots F_{a_n} \end{aligned}$$

を計算して、その (1, 1) 成分をみよう (系 6.1.8 と命題 6.3.3 からこれらが $|\gamma_{AB}^{RL}|$ と $|\gamma_{AB}^{LR}|$ を与える)。

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = F_{a_2} F_{a_3} \cdots F_{a_{n-1}}$$

とすると、両辺転置を取ること

$$\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = F_{a_{n-1}} F_{a_{n-2}} \cdots F_{a_2}$$

を得るので、 S_1, S_2 はそれぞれ

$$\begin{aligned} S_1 &= F_{a_1} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} F_{a_{n-1}} F_1 F_{2+k_1+k_2+k_3} F_{a_n} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} F_{a_1} \\ S_2 &= F_{a_n} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} F_{a_1} F_{2+k_1+k_2+k_3} F_1 F_{a_1-1} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} F_{a_n} \end{aligned}$$

と書き換えられる。それぞれの (1, 1) 成分を計算すると、どちらも

$$(3 + k_1 + k_2 + k_3)(a_1(a_n p + q) + (a_n r + s))^2$$

となることから、 $|\gamma_{AB}^{RL}| = |\gamma_{AB}^{LR}|$ である。

γ_{AM}^R の 2 番目の符号が (+) である場合は $s(\gamma_{AB}^{RL})$ と $s(\gamma_{AB}^{LR})$ の表示が逆になるが、議論は全く同様である。□

上記 2 つの補題を踏まえた上で、スケイン関係式を利用して次の補題を証明しよう。

補題 6.3.15. A, B を格子点とする。このとき $|\gamma_{AB}^{RL}| = |\gamma_{AB}^{LR}| \geq |\gamma_{AB}^L| = |\gamma_{AB}^R|$ が成立する。

証明. $|\gamma_{AB}^{RL}| = |\gamma_{AB}^{LR}|$ と $|\gamma_{AB}^L| = |\gamma_{AB}^R|$ は補題 6.3.8, 6.3.13, 6.3.14 からすでにわかっているので、 $|\gamma_{AB}^{LR}| \geq |\gamma_{AB}^L|$ を示す。線分 AB の内部に含まれる格子点が 0 個または 1 個の場合は、補題 6.3.13 で述べた理由から $|\gamma_{AB}^{LR}| = |\gamma_{AB}^L|$ なので、2 個以上を仮定する。定理 6.3.11 の記号を $\gamma_1 = \gamma_{AB}^{RL}$, $\gamma_2 = \gamma_{AB}^{LR}$ としてスケイン解消を行って $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ を得ると $\gamma_3 = \gamma_{AB}^R$, $\gamma_4 = \gamma_{AB}^L$ となり、さらに

$$|\gamma_{AB}^{RL}||\gamma_{AB}^{LR}| = |\gamma_{AB}^R||\gamma_{AB}^L| + |\gamma_5||\gamma_6|$$

が成り立つ (図 6.14 を参照せよ)。

さらに補題 6.3.8, 6.3.13, 6.3.14 からこの等式は

$$|\gamma_{AB}^{LR}|^2 = |\gamma_{AB}^L|^2 + |\gamma_5||\gamma_6|$$

と変形できる。また $|\gamma_5||\gamma_6| = 0$ であるケースは、 $|\gamma_5| \neq 0$ なので、 γ_6 が端点の一致する可縮ループの場合、すなわち長さを 0 と定めている場合に限られる。このとき直線 AB の内部に中点以外に \mathbb{R}^2 の点がないことになり、仮定に矛盾する。したがって $|\gamma_{AB}^{LR}|^2 > |\gamma_{AB}^L|^2$ であり、ここから $|\gamma_{AB}^{LR}| > |\gamma_{AB}^L|$ がしたがう。□

ここまでの準備により、定理 6.3.7 の証明を完成させる準備が整った。

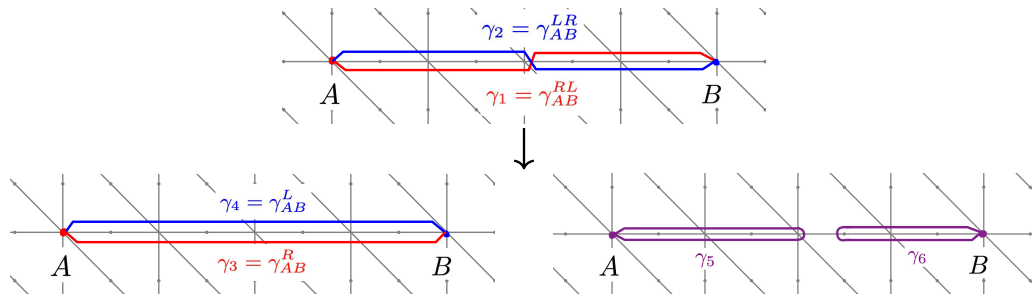


図 6.14 γ_{AB}^{RL} と γ_{AB}^{LR} のスケイン解消

定理 6.3.7 の証明. γ を A, B の GM 距離を与える曲線であるとする。 \mathbb{R}^2 上でホモトピーを保つようにして (すなわち曲線が \mathbb{R}^2 上の点を跨がないように) 「引き締め」て、 \mathbb{R}^2 の点にほとんど接するようになることを考える (図 6.15 参照)。このとき、 γ の経路は \mathbb{R}^2 の点 (の近傍) の間を結ぶ $r \geq 1$

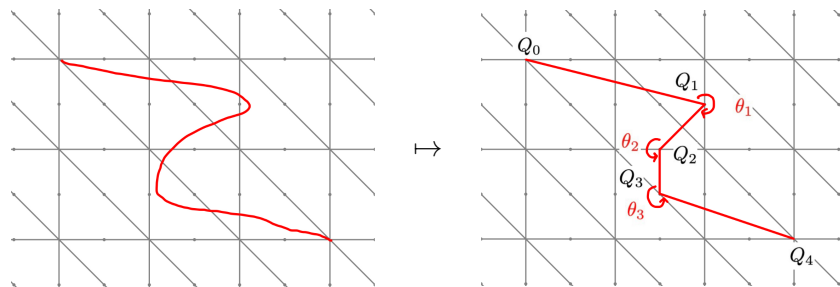


図 6.15 曲線の引き締め

本の線分である。この線分が経路する $r+1$ 個の \mathbb{R}^2 の点 $A = Q_0, Q_1, \dots, Q_r = B$ とする。さらに、 r 本の直線の間には $r-1$ 個の角 $\theta_1, \dots, \theta_{r-1}$ が挟まっているとする。ただし、ここでの角 θ_i は、点 Q_i を中心に外回りに計測した図の値を指すこととする。

ここで、各 i に対して $\theta_i \in [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$ である。そうでなければ、曲線 γ はもっと引き締めることができることになってしまう。

さて、 $r=1$ ならば互いに素な整数 p, q に対して必ず $\gamma = \gamma_{AB}^L$ または $\gamma = \gamma_{AB}^R$ となって結論が従う。したがって以下では $r \geq 2$ と仮定する。

「 γ が γ_{AB}^L または γ_{AB}^R にホモトピックである」ことと「すべての i に対して $\theta_i = -\pi$ が成り立つ、またはすべての i に対して $\theta_i = \pi$ が成り立つ」ことは同値であることに注意する。 A, B を γ_{AB}^L のすべての角が $\theta_i = -\pi$ となるように決める (そうならない場合は A と B を入れ替えれば良い)。

まず γ が $\theta_1 > 0$ であることを仮定する。 $\theta_1, \dots, \theta_i$ までのすべてが π であることを仮定したうえで、 θ_{i+1} が次の 3 つの場合 (1) $\theta_{i+1} \in [-2\pi, -\pi]$ 、(2) $\theta_{i+1} \in (\pi, 2\pi)$ 、(3) $\theta_{i+1} = 2\pi$ である場合を個別に考える。以下、次のようなロジックで証明を行う：各場合において γ と交差する別の弧 δ を与え、スケイン関係式を利用して γ より GM 長の短い A と B を結ぶ一般弧 γ' を見つけることで、これら (1), (2), (3) の状況があり得ないことがわかり、 $\theta_{i+1} = \pi$ となることがわかる。以上の議論を繰り返すことにより、 $\gamma = \gamma_{AB}^R$ であることが示され、証明が終わる。

さて、まず (1) の場合が起こらないことを示そう。 A が端点となり、 Q_{i+1} が中点となるような線分 AQ を考える。このときもう片方の端点 Q は必ず格子点である。さらに γ_{AQ}^L を考える。 γ と γ_{AQ}^L は γ_{AQ}^L の周りではかならず交差する (図 6.16) ので、この交差をスケイン解消することを考える。 $\gamma_1 = \gamma, \gamma_2 = \gamma_{AQ}^L$ として Q_{i+1} の周りの交点について定理 6.3.11 を適用すると、 $\gamma_3 = \gamma_{QA}^{RL}$ となる。

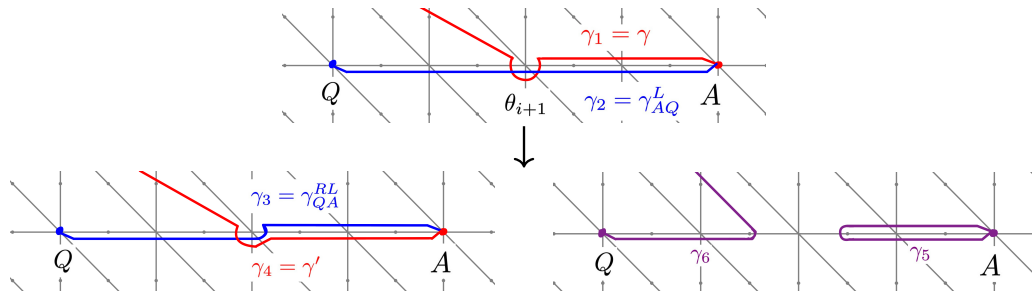


図 6.16 (1) のスケイン解消

また $\gamma_4 = \gamma'$ とおくと、 γ' は A, B を端点に持つ一般弧となり、さらに

$$|\gamma| |\gamma_{AQ}^L| = |\gamma_{QA}^{RL}| |\gamma'| + |\gamma_5| |\gamma_6|$$

が成立する。いま補題 6.3.15 から $|\gamma_{AQ}^L| < |\gamma_{QA}^{RL}|$ なので、

$$|\gamma'| = \frac{|\gamma| |\gamma_{AQ}^L| - |\gamma_5| |\gamma_6|}{|\gamma_{QA}^{RL}|} \leq \frac{|\gamma| |\gamma_{AQ}^L|}{|\gamma_{QA}^{RL}|} < \frac{|\gamma| |\gamma_{AQ}^L|}{|\gamma_{AQ}^L|} = |\gamma|$$

が成り立つ。 γ は GM 距離を与える曲線であったから、これは矛盾である。

次に (2) の場合が起こらないことを示そう。(1) と同様に γ_{AQ}^L を考える。 γ と γ_{AQ}^L は Q_{i+1} の周りでかならず交差する (図 6.17) ので、この交差をスケイン解消することを考える。 $\gamma_1 = \gamma, \gamma_2 = \gamma_{AQ}^L$

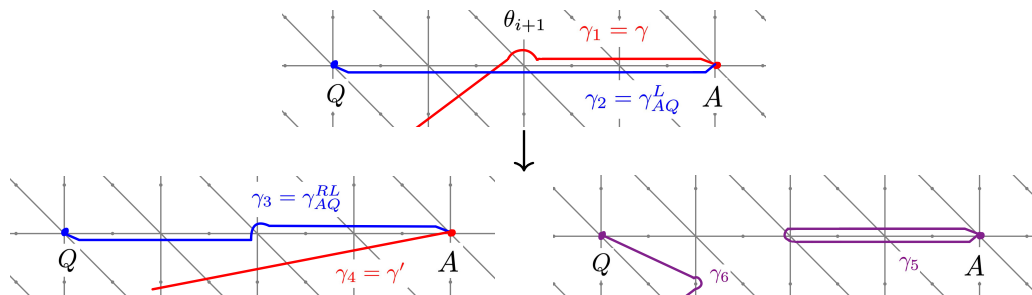


図 6.17 (2) のスケイン解消

として Q_{i+1} の周りの交点について定理 6.3.11 を適用すると、 $\gamma_3 = \gamma_{AQ}^{RL}$ となる。また $\gamma_4 = \gamma'$ とおくと、 γ' は A, B を端点に持つ一般弧となり、さらに

$$|\gamma| |\gamma_{AQ}^L| = |\gamma_{AQ}^{RL}| |\gamma'| + |\gamma_5| |\gamma_6|$$

が成立する。いま補題 6.3.15 から $|\gamma_{AQ}^L| < |\gamma_{AQ}^{RL}|$ なので、

$$|\gamma'| = \frac{|\gamma| |\gamma_{AQ}^L| - |\gamma_5| |\gamma_6|}{|\gamma_{AQ}^{RL}|} \leq \frac{|\gamma| |\gamma_{AQ}^L|}{|\gamma_{AQ}^{RL}|} < \frac{|\gamma| |\gamma_{AQ}^L|}{|\gamma_{AQ}^L|} = |\gamma|$$

が成り立つ。 γ は GM 距離を与える曲線であったから、これは矛盾である。

最後に (3) を示す。 $\theta_{i+2} = \theta_{i+3} = \dots = \theta_{2i} = \pi$ であるときは、 A から始まった曲線 γ が Q_{i+1} で折り返して端点 A の付近を通過する状況である。このときは端点 A から γ が A に引き返してきたところに直接繋いだ一般弧 γ' を考えれば、 $P_{\gamma'}$ は P_γ の真の部分順序集合なので $|\gamma'| < |\gamma|$ が成立する。これ以降はある $2 \leq j \leq i$ で $\theta_{i+j} \neq \pi$ を仮定する。

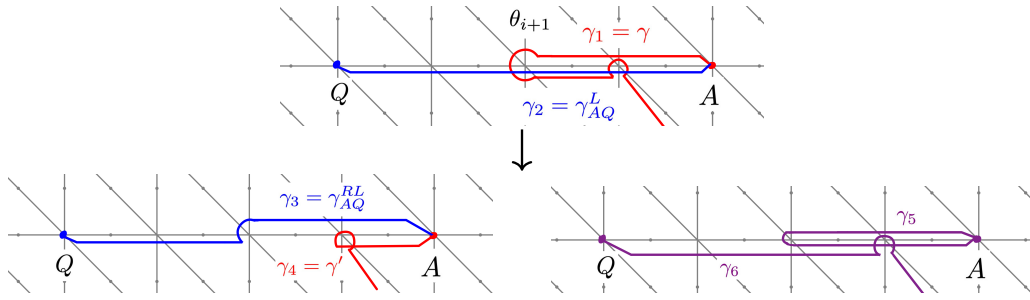


図 6.18 (3) のスケイン解消

γ_{AQ}^L を、最小交差位置で γ と交わるようにホモトピックに動かすことで、点 $Q_{i-j} = Q_{i+j}$ の近傍で γ と γ_{AQ}^L が交差するようになる。ここで $\gamma_1 = \gamma, \gamma_2 = \gamma_{AQ}^L$ として定理 6.3.11 を適用すると $\gamma_5 = \gamma_{AQ}^{RL}$ となる。また $\gamma_6 = \gamma'$ とおくと

$$|\gamma'| = \frac{|\gamma| |\gamma_{AQ}^L| - |\gamma_5| |\gamma_6|}{|\gamma_{AQ}^{RL}|} \leq \frac{|\gamma| |\gamma_{AQ}^L|}{|\gamma_{AQ}^{RL}|} < \frac{|\gamma| |\gamma_{AQ}^L|}{|\gamma_{AQ}^L|} = |\gamma|$$

が成り立ち矛盾する。以上から証明された。

$\theta_1 < 0$ のときは $\theta_1 > 0$ のときの証明の π を $-\pi$ に置き換え、 L と R を交換することで同じ議論から示すことができる。 □

注 6.3.16. 定理 6.3.7 で使用されているスケイン関係式はすべて 0 型解消に由来するものである。

一方、実は Q_{i+1} が格子点である場合は (1), (3) のケースでは $\delta = \gamma_{AQ_{i+1}}^L$, (2) のときは線分 AQ_{i+1} の延長にある Q_{i+1} の隣の頂点 E を使って $\delta = \gamma_{AE}^L$ としてスケイン解消を行っても γ より短い γ' を得ることができる。この場合は (1), (3) では 1 型、(2) では 0 型解消由来のスケイン関係式を使用することになる。ただどの場合でも 2 型解消は使用されないので、本稿の範囲内では実は 2 型解消は必要ない。

この章では GM 長と GM 距離について扱ってきたが、ここにどのように GM 数が関係するかということは、これまで一切述べてこなかった。この章の最後に述べる以下の定理により、その関係性が明らかになる。ただしこの定理の証明は 7.4 節で行う。

定理 6.3.17. $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3, \sigma \in \mathfrak{S}_3$ を固定し、 p, q を互いに素である非負整数とする。このとき、 $A = (0, 0), B = (q, p)$ とすると

$$|\gamma_{AB}^R| = |\gamma_{AB}^L| = m_{\frac{p}{q}}$$

が成立する。特に、 $d(A, B) = m_{\frac{p}{q}}$ である。

第7章

一般化コーン行列

第6章では、一般化マルコフ数をフェンス型順序集合、スケイン関係式、曲線の一般化マルコフ長・一般化マルコフ距離といった組合せ論的・幾何学的対象を通して記述した。本章では、それらの情報をさらに 2×2 行列の言葉へ移し、一般化マルコフ数の理論を行列論の立場から捉え直す。そのために導入するのが一般化コーン行列である。これは古典理論において重要な役割を果たすコーン行列の一般化であり、前章までに現れた数や曲線の情報を一つの枠組みにまとめ上げる役割を担う。

本章では、まず一般化コーン木を定義し、各既約分数に付随する一般化コーン行列を系統的に構成する。ついで、その成分が一般化マルコフ数と特性数を用いて具体的に記述できることを示し、一般化コーン行列がこれまで導入してきた算術的データを直接に保持していることを明らかにする。さらに特性数の間に成り立つ関係式を証明し、最後に一般化強許容数列を導入することで、一般化コーン行列が基本行列の積として表されることを示す。これにより、第5章で準備した整数論的情報と、第6章で得られた組合せ論的・幾何学的情報とが、行列表示を通して一つに統合される。

とりわけ本章の重要な点は、一般化マルコフ数、特性数、曲線、連分数的データの間にある関係が、一般化コーン行列という対象の中に同時に反映されていることである。この性質上、一般化コーン行列はこれらの性質を解明するツールとしても非常に便利であり、実際第5章と第6章で後回しにした2つの重要な命題が一般化コーン行列の計算から証明されることになる。またこの章で得られる行列表現は、次章で一般化離散マルコフスペクトラムを定義し、その値を具体的に実現するための基礎となる。

本章の内容は [GM23a, GMS24, Gyo25] に基づいている。ただし、[GM23a, GMS24] における一般化コーン行列の定義は、本稿で展開する連分数行列の記法とやや異なるため、本稿では以後の議論と整合する形に定義を調整して用いる。この変更は記法上の整合性を保つためのものであり、先行研究における議論そのものを否定するものではない。

7.1 定義と具体例

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ および $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ を固定する。 $C_{\frac{0}{1}}, C_{\frac{1}{1}}, C_{\frac{1}{0}}$ を次で定める：

$$C_{\frac{0}{1}} = \begin{bmatrix} 3 + k_1 + k_2 + k_3 & -(3 + k_1 + k_2 + k_3)k_{\sigma(1)} - 1 \\ 1 & -k_{\sigma(1)} \end{bmatrix},$$

$$C_{\frac{1}{1}} = \begin{bmatrix} (3 + k_1 + k_2 + k_3)(k_{\sigma(2)} + 2) - k_{\sigma(2)} - 1 & 2 + k_1 + k_2 + k_3 \\ k_{\sigma(2)} + 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{\frac{1}{6}} = \begin{bmatrix} 2 + k_1 + k_2 + k_3 - k_{\sigma(3)} & 1 + k_1 + k_2 + k_3 - k_{\sigma(3)} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

さらに任意の $(r, t, s) \in \text{FT}$ に対し、帰納的に

$$C_{r \oplus t} := C_r C_t - D_s, \quad C_{t \oplus s} := C_t C_s - D_r$$

と定める。ただし

$$D_r = \begin{bmatrix} k_{i_r} & k_{i_r}(3 + k_1 + k_2 + k_3) \\ 0 & k_{i_r} \end{bmatrix}$$

である。行列 C_t を (k_1, k_2, k_3, σ) 一般化コーン行列 (以下、GC 行列) と呼ぶ。さらに、 (k_1, k_2, k_3, σ) 一般化コーン木 (以下、GC 木) を次で定義する：

$$\text{CoT}(k_1, k_2, k_3, \sigma) := \text{FT} \Big|_{(r,t,s) \mapsto (C_r, C_t, C_s)}.$$

このツリーの各頂点を (k_1, k_2, k_3, σ) 一般化コーントリプル (以下、GC トリプル) と呼ぶことにする。

例 7.1.1. $\text{CoT}(1, 2, 0, \text{id})$ における最初のいくつかの頂点は次の通りである：

$$\begin{array}{c} \left(\left(\begin{bmatrix} 21 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 109 & 83 \\ 21 & 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{array}{l} \text{---} \left(\begin{bmatrix} 109 & 83 \\ 21 & 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 626 & 507 \\ 121 & 98 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ \text{---} \left(\begin{bmatrix} 21 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2394 & 1823 \\ 457 & 348 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 109 & 83 \\ 21 & 16 \end{bmatrix} \right) \end{array} \\ \left(\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 21 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ \left(\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 98 & 23 \\ 17 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 21 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{array}{l} \text{---} \left(\begin{bmatrix} 98 & 23 \\ 17 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2149 & 507 \\ 373 & 88 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 21 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ \text{---} \left(\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 367 & 98 \\ 81 & 17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 98 & 23 \\ 17 & 4 \end{bmatrix} \right) \end{array} \end{array}$$

7.2 一般化マルコフ数と特性数による成分の記述

以下、 k_{i_t} を k_t と略記する。この節の目標は、一般化コーン行列の成分を具体的に記述する次の定理の証明である。

定理 7.2.1. 任意の既約分数 $t \in [0, \infty]$ に対して

$$C_t = \begin{bmatrix} (3 + k_1 + k_2 + k_3)m_t - k_t - u_t & \frac{(3 + k_1 + k_2 + k_3)m_t u_t - k_t u_t - u_t^2 - 1}{m_t} \\ m_t & u_t \end{bmatrix}.$$

となる。

以下の議論では省スペースのために $K := 3 + k_1 + k_2 + k_3$ とする。まずはトレースの値と行列式の値から見ていこう。

命題 7.2.2. 任意の $t \in [0, \infty]$ に対して次が成り立つ。

$$(1) \text{tr}(C_t) = K(C_t)_{21} - k_t,$$

(2) $C_t \in SL(2, \mathbb{Z})$.

命題 7.2.2 を証明するために、2つの補題を導入する。

補題 7.2.3. $A, B \in SL(2, \mathbb{Z})$ とする。このとき、次が成り立つ：

- (1) $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^{-1})$
- (2) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A)\text{tr}(B) - \text{tr}(AB^{-1})$
- (3) $A^2 = \text{tr}(A)A - E_2$ (ただし E_2 は 2 次単位行列) (ケーリー・ハミルトンの定理 (系 A.2.2) の特別な形)

証明. すべて行列成分の直接計算から従う。確かめよ。 □

補題 7.2.4. $\text{tr}(M) = Km_{21} - k_t$ を満たす $M \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して、次の等式が成り立つ：

$$M \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M = (\text{tr}(M) + k_t)M + \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M^{-1} \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M^{-1} = -(\text{tr}(M^{-1}) + k_t)M^{-1} + \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

証明. 第一の等式のみを示す。 $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ とおくと、

$$\begin{aligned} M \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M &= M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & K \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Km_{21} & Km_{22} \end{bmatrix} \\ &= K \begin{bmatrix} m_{11}m_{21} & m_{11}m_{22} \\ m_{21}^2 & m_{21}m_{22} \end{bmatrix} = Km_{21} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (\text{tr}(M) + k_t)M + \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

途中 $m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} = 1$ を用いて変形していることに注意せよ。 □

命題 7.2.2 の証明. まず (1) を示す。 $C_{\frac{1}{2}}, C_{\frac{1}{3}}, C_{\frac{1}{6}}$ については直接成分を計算することにより証明される。残りは GC 木の最初の頂点からの距離に関する帰納法によって証明する。GC トリプル (C_r, C_t, C_s) が (1) を満たしているとする。このとき、次を示せば十分である：

$$\text{tr}(C_{r \oplus t}) = K(C_{r \oplus t})_{21} - k_{r \oplus t}, \quad \text{tr}(C_{t \oplus s}) = K(C_{t \oplus s})_{21} - k_{t \oplus s}.$$

ここで、 $k_{r \oplus t} = k_s, k_{t \oplus s} = k_r$ であることに注意する。前者の等式のみを示す (後者も同様である)。
 $C_t = C_r C_s - D_t$ より

$$\begin{aligned} \text{tr}(C_{r \oplus t}) &= \text{tr}(C_r C_t - D_s) = \text{tr}(C_r(C_r C_s - D_t)) - 2k_s = \text{tr}(C_r^2 C_s) - \text{tr}(C_r D_t) - 2k_s \\ &\stackrel{\text{補題 7.2.3(2)}}{=} \text{tr}(C_r)\text{tr}(C_r C_s) - \text{tr}(C_r C_s^{-1} C_r^{-1}) - \text{tr}(C_r D_t) - 2k_s \\ &= \text{tr}(C_r)\text{tr}(C_r C_s) - \text{tr}(C_s) - \text{tr}(C_r D_t) - 2k_s. \end{aligned}$$

が成立している。ここで $C_r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$ として

$$\text{tr}(D_t C_r^{-1}) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} r_{22}k_t - r_{21}Kk_t & * \\ * & r_{11}Kk_t \end{bmatrix} \right) = k_t \text{tr}(C_r) - Kk_t r_{21} = -k_r k_t$$

であることに注意すると (帰納法の仮定を C_r に対して使用している)、さらに

$$\text{tr}(C_r)\text{tr}(C_r C_s) - \text{tr}(C_r D_t) - \text{tr}(C_s) - 2k_s$$

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{tr}(C_r)\operatorname{tr}(C_r C_s) - \operatorname{tr}(C_r D_t) - \operatorname{tr}(C_s) - 2k_s + k_r k_t - k_r k_t \\
 &= \operatorname{tr}(C_r)\operatorname{tr}(C_r C_s) - \operatorname{tr}(C_r D_t) - \operatorname{tr}(C_r^{-1} D_t) - \operatorname{tr}(C_s) - k_r k_t - 2k_s \\
 &= \operatorname{tr}(C_r)\operatorname{tr}(C_r C_s) - \operatorname{tr}((C_r + C_r^{-1})D_t) - \operatorname{tr}(C_s) - k_r k_t - 2k_s \\
 &= \operatorname{tr}(C_r)\operatorname{tr}(C_r C_s) - \operatorname{tr}(C_r)\operatorname{tr}(D_t) - \operatorname{tr}(C_s) - k_r k_t - 2k_s \\
 &= \operatorname{tr}(C_r)\operatorname{tr}(C_r C_s - D_t) - \operatorname{tr}(C_s) - k_r k_t - 2k_s \\
 &= \operatorname{tr}(C_r)\operatorname{tr}(C_t) - \operatorname{tr}(C_s) - k_r k_t - 2k_s \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - k_r \right) \left(\begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - k_t \right) \\
 &\quad - \left(\begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - k_s \right) - k_r k_t - 2k_s \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_r \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_r C_s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - k_r \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_r C_s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad - k_t \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - k_s \\
 &\stackrel{\text{補題 7.2.4}}{=} \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left((\operatorname{tr} C_r + k_r) C_r + \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) C_s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - k_r \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_r C_s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad - k_t \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - k_s \\
 &\stackrel{\text{補題 7.2.3 (3)}}{=} \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_r^2 C_s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - k_t \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - k_s \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (C_r^2 C_s - C_r D_t - D_s) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - k_s \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (C_r C_t - D_s) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - k_s = K(C_{r \oplus t})_{21} - k_s.
 \end{aligned}$$

と変形できる。以上から示された。次に (2) を示す。 $\det(C_{r \oplus t}) = \det(C_{t \oplus s}) = 1$ を示せば十分である。こちらも $\det(C_{r \oplus t}) = 1$ のみを示す。 $C_r C_t = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned}
 \det(C_{r \oplus t}) &= \det(C_r C_t - D_s) \\
 &= (x_{11} - k_s)(x_{22} - k_s) - x_{21}(x_{12} - K k_s) \\
 &= \det(C_r C_t) - k_s \operatorname{tr}(C_r C_t) + k_s^2 + K k_s x_{21} = \det(C_r C_t) = 1.
 \end{aligned}$$

以上から示された。 □

さらにこれを利用して、次の命題を証明する。

命題 7.2.5. 任意の $t \in [0, \infty]$ に対して、 $(C_t)_{21} = m_t$ が成り立つ。

証明. $t = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}$ の場合については直接計算により示される。他の場合については、残りは GC 木の最初の頂点からの距離に関する帰納法によって証明する。GC トリプル (C_r, C_t, C_s) が命題を満たしているとする。示すべきは

$$(C_{r \oplus t})_{21} = m_{r \oplus t} = \frac{m_r^2 + k_s m_r m_t + m_t^2}{m_s}, \quad (C_{t \oplus s})_{21} = m_{t \oplus s} = \frac{m_t^2 + k_r m_t m_s + m_s^2}{m_r}$$

である。前半のみを示す（後半も同様である）。命題 7.2.2 の証明中で、

$$\operatorname{tr}(C_{r \oplus t}) = \operatorname{tr}(C_r)\operatorname{tr}(C_t) - \operatorname{tr}(C_s) - k_r k_t - 2k_s$$

が得られている（右辺は証明中で $\text{tr}(C_{r \oplus t})$ を変形しているときの、行列を用いる変形をする直前の形である）。命題 7.2.2 (1) をこの等式に適用して整理することで

$$(C_{r \oplus t})_{21} = K(m_r m_t) - m_r k_t - m_t k_r - m_s \quad (7.2.1)$$

となる。 (m_r, m_t, m_s) が GM 方程式の解であること、すなわち

$$m_r^2 + m_t^2 + m_s^2 + k_r m_t m_s + k_t m_s m_r + k_s m_r m_t = K m_r m_t m_s$$

を満たしていることから (7.2.1) を変形することで

$$(C_{r \oplus t})_{21} = \frac{m_r^2 + k_s m_r m_t + m_t^2}{m_s}$$

となる。以上から示された。 \square

最後に、次の命題を示す。

命題 7.2.6. 任意の $t \in [0, \infty]$ に対して、 $(C_t)_{22} = u_t$ が成り立つ。

これを示すために指標の概念を導入しよう。

定義 7.2.7. 任意の $t \in [0, \infty] \cap \mathbb{Q}$ に対して、

$$I_t := \frac{(C_t)_{22}}{(C_t)_{21}}$$

を C_t の指標という。

命題 7.2.8. 指標は単調増加である。すなわち、 $s < t$ に対して $I_s < I_t$ が成り立つ。ただし $\frac{1}{0}$ は任意の有理数より大きいとみなす。

証明. 各ファレイトリプル $(r, t, s) \in \text{FT}$ について $I_r < I_t < I_s$ を示せば十分である。まず $I_t < I_s$ を示す。 $C_t = C_r C_s - D_t$ が成り立つので、 $C_r = (C_t + D_t) C_s^{-1}$ である。この等式の (2, 1) 成分を比較すると

$$r_{21} = s_{22} t_{21} - (t_{22} + k_t) s_{21} \leq s_{22} t_{21} - t_{22} s_{21}.$$

したがって

$$0 < \frac{r_{21}}{t_{21} s_{21}} \leq \frac{s_{22}}{s_{21}} - \frac{t_{22}}{t_{21}} = I_s - I_t.$$

以上から $I_t < I_s$ が成り立つ。次に $I_r < I_t$ を示す。 $C_t = C_r C_s - D_t$ より $C_s = C_r^{-1}(C_t + D_t)$ を得る。この等式の (2, 1) 成分を比較すると

$$\begin{aligned} s_{21} &= r_{11} t_{21} - r_{21} (t_{11} + k_t) \\ &= (K r_{21} - k_r - r_{22}) t_{21} - r_{21} (K t_{21} - t_{22}) \\ &= -k_r t_{21} + t_{22} r_{21} - t_{21} r_{22} \leq t_{22} r_{21} - t_{21} r_{22}. \end{aligned}$$

したがって

$$0 < \frac{s_{21}}{r_{21} t_{21}} \leq \frac{t_{22}}{t_{21}} - \frac{r_{22}}{r_{21}} = I_t - I_r.$$

以上から $I_r < I_t$ が成り立つ。 \square

補題 7.2.9. 既約分数 $t \in (0, \infty]$ に対し、 $(C_t)_{22} > 0$ である。

証明. 指標の単調増加性 (命題 7.2.8) より、 $t = \frac{1}{n}$ の場合を示せば十分である。まず $C_{\frac{1}{1}}$ の (2, 2) 成分は 1 である。 $C_{\frac{1}{2}}$ の (2, 2) 成分は $k_{\frac{1}{0}} + 2$ なので、 $C_{\frac{1}{1}}$ の (2, 2) 成分より大きい。 $C_{\frac{1}{i}}$ の (1, 1) 成分が正であり、かつ $C_{\frac{1}{i+1}}$ の (2, 2) 成分が $C_{\frac{1}{i}}$ の (2, 2) 成分より大きいと仮定する。このとき $C_{\frac{1}{i+2}}$ の (2, 2) 成分が $C_{\frac{1}{i+1}}$ の (2, 2) 成分より大きいこと、特に正であることを示す。次のようにおく：

$$C_{\frac{1}{i}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad C_{\frac{1}{i+1}} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}, \quad C_{\frac{1}{i+2}} = \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix}.$$

このとき

$$\begin{aligned} C_{\frac{1}{i+1}} &= C_{\frac{1}{i}} C_{\frac{1}{i}} - D_{\frac{1}{i-1}} \\ &= \begin{bmatrix} K & -Kk_{\frac{1}{0}} - 1 \\ 1 & -k_{\frac{1}{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{\frac{1}{i-1}} & Kk_{\frac{1}{i-1}} \\ 0 & k_{\frac{1}{i-1}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} * & Kb - Kk_{\frac{1}{0}}d - d - Kk_{\frac{1}{i-1}} \\ * & b - k_{\frac{1}{0}}d - k_{\frac{1}{i-1}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

したがって

$$b' = Kb - Kk_{\frac{1}{0}}d - d - Kk_{\frac{1}{i-1}}, \quad d' = b - k_{\frac{1}{0}}d - k_{\frac{1}{i-1}}.$$

仮定より $b - k_{\frac{1}{0}}d - k_{\frac{1}{i-1}} \geq d > 0$ である。さらに

$$C_{\frac{1}{i+2}} = C_{\frac{1}{i+1}} C_{\frac{1}{i+1}} - D_{\frac{1}{i}}$$

より

$$\begin{aligned} d'' - d' &= b' - (k_{\frac{1}{0}} + 1)d' - k_{\frac{1}{i}} \\ &= (K - k_{\frac{1}{0}} - 1)b + (k_{\frac{1}{0}}^2 + (1 - K)k_{\frac{1}{0}} - 1)d + (k_{\frac{1}{0}} + 1 - K)k_{\frac{1}{i-1}} - k_{\frac{1}{i}} \\ &\geq (K - k_{\frac{1}{0}} - 1)((k_{\frac{1}{0}} + 1)d + k_{\frac{1}{i-1}}) + (k_{\frac{1}{0}}^2 + (1 - K)k_{\frac{1}{0}} - 1)d + (k_{\frac{1}{0}} + 1 - K)k_{\frac{1}{i-1}} - k_{\frac{1}{i}} \\ &= (K - 2 - k_{\frac{1}{0}})d - k_{\frac{1}{i}} \geq k_{\frac{1}{i+1}} + 1 > 0 \end{aligned}$$

となり、結論を得る。 □

命題 7.2.6 の証明. $t = \frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ の時は直接計算により示される。 $t \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ に対して、 t を第 2 成分とするファレイトリプル (r, t, s) をとる。このとき、

$$C_s = C_r^{-1}(C_t + D_t)$$

であり、命題 7.2.2 (1) と命題 7.2.5 から

$$C_r = \begin{bmatrix} Km_r - k_r - (C_r)_{22} & * \\ m_r & (C_r)_{22} \end{bmatrix}, \quad C_t = \begin{bmatrix} Km_t - k_t - (C_t)_{22} & * \\ m_t & (C_t)_{22} \end{bmatrix}$$

であることを利用して各辺の (2, 1) 成分を計算することで

$$m_s = m_r(C_t)_{22} - m_t(k_r + (C_r)_{22})$$

が成り立つ。したがって

$$m_r(C_t)_{22} \equiv m_s \pmod{m_t}$$

となる。さらに、命題 7.2.8 と補題 7.2.9 から

$$0 < I_t < I_{\frac{1}{2}} = 1$$

が成り立つので $0 < (C_t)_{22} < m_t$ となる。これらと u_t の一意性から $u_t = (C_t)_{22}$ であることがわかる。□

ここまでの議論で、定理 7.2.1 はもう証明できたも同然である。

定理 7.2.1 の証明. 命題 7.2.2, 命題 7.2.5, 命題 7.2.6 から直ちに従う。□

7.3 特性数の関係式

この節では、GC 行列を使って 5.4 節で後回しにした次の命題を証明する。

命題 5.4.4 (再掲). 任意の既約分数 $t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ に対して、 $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ で分数ラベル t を持つ特性数を u_t とし、 $k_t := k_{i_t}$ とおく。また、 $\text{MT}(k_1, k_2, k_3, \sigma^*)$ において分数ラベル $\frac{1}{t}$ を持つ特性数を $u_{\frac{1}{t}}^*$ とする。このとき

$$u_{\frac{1}{t}}^* = m_t - u_t - k_t$$

が成り立つ。

補題 7.3.1. (k_1, k_2, k_3, σ) -GM 木に含まれる $t \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ のラベルをもつ (k_1, k_2, k_3) -GM 数について次が成り立つ。

- (1) $i_t = \sigma(1)$ ならば $m_t \geq m_{\frac{2}{3}}$ である。
- (2) $i_t = \sigma(2)$ ならば $m_t \geq m_{\frac{1}{2}}$ である。
- (3) $i_t = \sigma(3)$ ならば $m_t \geq m_{\frac{1}{2}}$ である。

さらにこれらの評価は最良である。

証明. 注 5.1.8 と命題 5.2.6 から (k_1, k_2, k_3, σ) -GM 木上で子を取ったときに新しく現れる GM 数は親頂点に含まれるどの GM 数よりも大きいので、(2),(3) は明らかである。(1) を示す。(2),(3) と同じ理由から $m_{\frac{2}{2i+3}}$ (ただし $i \geq 1$) の値を比較すれば十分である。 $\frac{2}{2i+1}$ を第 2 成分に持つファレイトリプルは $(\frac{1}{i+1}, \frac{2}{2i+1}, \frac{1}{i})$ であり、この頂点の親は $(\frac{0}{1}, \frac{1}{i+1}, \frac{1}{i})$ なので

$$m_{\frac{2}{2i+1}} = \frac{m_{\frac{1}{i+1}}^2 + k_{\sigma(1)} m_{\frac{1}{i+1}} m_{\frac{1}{i}} + m_{\frac{1}{i}}^2}{m_{\frac{0}{1}}} = m_{\frac{1}{i+1}}^2 + k_{\sigma(1)} m_{\frac{1}{i+1}} m_{\frac{1}{i}} + m_{\frac{1}{i}}^2$$

である。任意の i に対して $(m_{\frac{0}{1}}, \sigma(1)), (m_{\frac{1}{i+1}}, \alpha), (m_{\frac{1}{i}}, \beta)$ の形をしたトリプルが (k_1, k_2, k_3, σ) -GM 木の頂点として存在することを踏まえると $m_{\frac{1}{i}} < m_{\frac{1}{i+1}}$ が成り立つ。以上から任意の $i \geq 1$ に対して $m_{\frac{2}{2i+1}} < m_{\frac{2}{2i+3}}$ となるので、 $m_{\frac{2}{3}}$ が最小である。□

命題 5.4.4 の証明. $t = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$ のときは直接計算で示される。 $t \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ を仮定する。 t を第 2 成分として持つファレイトリプルを (r, t, s) とする。このとき $(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}, \frac{1}{r})$ もファレイトリプルである。ここで $u_{\frac{1}{t}}^*$ は定義から

$$m_{\frac{1}{s}}^* u_{\frac{1}{t}}^* \equiv m_{\frac{1}{r}}^* \pmod{m_{\frac{1}{t}}^*}, \quad 0 < u_{\frac{1}{t}}^* < m_{\frac{1}{t}}^*$$

を満たす整数である。一意性から、 $m_t - u_t - k_t$ がこの条件を満たすことを示せば良い。ここで系 5.3.7 から $m_{\frac{1}{r}}^* = m_r, m_{\frac{1}{t}}^* = m_t, m_{\frac{1}{s}}^* = m_s$ であるから、

$$m_s x \equiv m_r \pmod{m_t}, \quad 0 < x < m_t$$

を $m_t - u_t - k_t$ が満たすことを示せば十分。まずコーントリプル (C_r, C_t, C_s) について

$$C_r = (C_t + D_t)C_s^{-1}$$

を満たすことから各辺の $(2, 1)$ 成分を比較することで

$$m_r = m_t u_s + m_s(-u_t - k_t) \equiv m_s(-u_t - k_t) \equiv m_s(m_t - u_t - k_t) \pmod{m_t}$$

であることがわかる。 $0 < m_t - u_t - k_t < m_t$ であることを示す。 $m_t - u_t - k_t < m_t$ は明らかなので $0 < m_t - u_t - k_t$ を示す。 $i_t = \sigma(2)$ のとき $m_t \geq m_{\frac{1}{t}} = k_{\sigma(2)} + 2$ であり、また $I_t < I_{\frac{1}{t}}$ より $u_t < \frac{m_t}{k_{\sigma(2)} + 2}$ が成り立っている。したがって

$$m_t - u_t - k_t > (k_{\sigma(2)} + 2) \left(1 - \frac{1}{k_{\sigma(2)} + 2}\right) - k_{\sigma(2)} = 1 > 0$$

より示される。

$i_t = \sigma(3)$ のとき、 $m_t \geq m_{\frac{1}{t}} = Kk_{\sigma(2)} + 2K - k_{\sigma(1)}k_{\sigma(2)} - 2k_{\sigma(1)} - k_{\sigma(2)} - 1$ であるから

$$\begin{aligned} m_t - u_t - k_t &> (Kk_{\sigma(2)} + 2K - k_{\sigma(1)}k_{\sigma(2)} - 2k_{\sigma(1)} - k_{\sigma(2)} - 1) \left(1 - \frac{1}{k_{\sigma(2)} + 2}\right) - k_{\sigma(3)} \\ &\geq \frac{1}{2}(Kk_{\sigma(2)} + 2K - k_{\sigma(1)}k_{\sigma(2)} - 2k_{\sigma(1)} - k_{\sigma(2)} - 1) - k_{\sigma(3)} \\ &= \frac{1}{2}(k_{\sigma(2)}^2 + k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)} + 4k_{\sigma(2)} + 5) > 0 \end{aligned}$$

より示される ($K = 3 + k_{\sigma(1)} + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)}$ を代入して計算していることに注意)。

$i_t = \sigma(1)$ のとき、

$$\begin{aligned} m_t &\geq m_{\frac{2}{3}} \\ &= (Kk_{\sigma(2)} + 2K - k_{\sigma(1)}k_{\sigma(2)} - 2k_{\sigma(1)} - k_{\sigma(2)} - 1)(K(k_{\sigma(2)} + 2) - k_{\sigma(2)} - 1) \\ &\quad + (K - k_{\sigma(1)} - k_{\sigma(3)} - 1)(k_{\sigma(2)} + 2) \end{aligned}$$

であり、これに $K = 3 + k_1 + k_2 + k_3$ を代入することで

$$\begin{aligned} m_t &\geq k_{\sigma(1)}k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)}^2 + 4k_{\sigma(1)}k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)} + 4k_{\sigma(1)}k_{\sigma(3)} + k_{\sigma(1)}k_{\sigma(2)}^3 + 6k_{\sigma(1)}k_{\sigma(2)}^2 + 13k_{\sigma(1)}k_{\sigma(2)} + 10k_{\sigma(1)} \\ &\quad + k_{\sigma(3)}^2k_{\sigma(2)}^2 + 4k_{\sigma(3)}^2k_{\sigma(2)} + 4k_{\sigma(3)}^2 + 2k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)}^3 + 12k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)}^2 + 26k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)} + 20k_{\sigma(3)} \\ &\quad + k_{\sigma(2)}^4 + 8k_{\sigma(2)}^3 + 27k_{\sigma(2)}^2 + 44k_{\sigma(2)} + 29 \end{aligned}$$

を得る。したがって、 $i_t = \sigma(3)$ のときと同様に

$$\begin{aligned} m_t - u_t - k_t &> \frac{1}{2}(k_{\sigma(1)}k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)}^2 + 4k_{\sigma(1)}k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)} + 4k_{\sigma(1)}k_{\sigma(3)} + k_{\sigma(1)}k_{\sigma(2)}^3 + 6k_{\sigma(1)}k_{\sigma(2)}^2 \\ &\quad + 13k_{\sigma(1)}k_{\sigma(2)} + 10k_{\sigma(1)} + k_{\sigma(3)}^2k_{\sigma(2)}^2 + 4k_{\sigma(3)}^2k_{\sigma(2)} + 4k_{\sigma(3)}^2 + 2k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)}^3 \\ &\quad + 12k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)}^2 + 26k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)} + 20k_{\sigma(3)} + k_{\sigma(2)}^4 + 8k_{\sigma(2)}^3 + 27k_{\sigma(2)}^2 + 44k_{\sigma(2)} + 29) \\ &\quad - k_{\sigma(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}(k_{\sigma(1)}k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)}^2 + 4k_{\sigma(1)}k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)} + 4k_{\sigma(1)}k_{\sigma(3)} + k_{\sigma(1)}k_{\sigma(2)}^3 + 6k_{\sigma(1)}k_{\sigma(2)}^2 \\
 &+ 13k_{\sigma(1)}k_{\sigma(2)} + 8k_{\sigma(1)} + k_{\sigma(3)}^2k_{\sigma(2)}^2 + 4k_{\sigma(3)}^2k_{\sigma(2)} + 4k_{\sigma(3)}^2 + 2k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)}^3 \\
 &+ 12k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)}^2 + 26k_{\sigma(3)}k_{\sigma(2)} + 20k_{\sigma(3)} + k_{\sigma(2)}^4 + 8k_{\sigma(2)}^3 + 27k_{\sigma(2)}^2 + 44k_{\sigma(2)} + 29) \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

となり、示された。 □

7.4 一般化強許容数列による一般化コーン行列の記述

この節では一般化コーン行列が実は基本行列の積に分解できることを示す。

$t = \frac{p}{q}$ を正の既約分数とする。 \mathbb{R}^2 上の 2 点 $A = (0, 0)$ と $B = (q, p)$ を考え、この端点を結ぶ曲線片 γ_{AB}^L を考える。この節では既約分数 t に付随していることを強調するために、この曲線を L_t と表すことにする。各端点を、それぞれ A, B からわずかに左へ平行移動して得られる曲線片を、 \overline{L}_t で表すことにする (図 7.1 参照)。ここで、左端点は左下の辺を通過するものとみなし、一方で右端点は右上の辺の内部にとどまるものとみなす。両端点の扱いのこの微妙な違いは符号ルールの適用時に意味をなす。

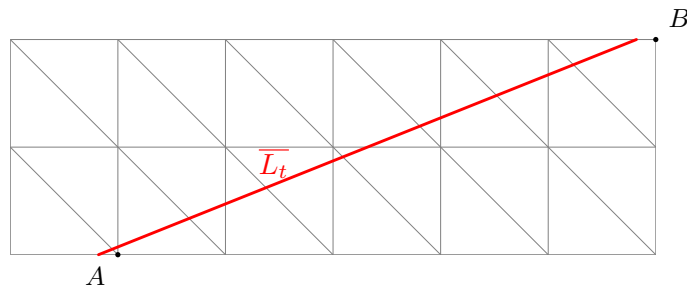


図 7.1 $t = \frac{2}{5}$ に対応する線分 \overline{L}_t

注 7.4.1. 次の方法で 1 点穿孔トーラスを用いても \overline{L}_t を得ることができる。 $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の L_t を三角形分割された 1 点穿孔トーラス上に射影し、その弧の点とその周りをわずかに上方へ押し上げてループを得る。そして、そのループを再び $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ に埋め込んだものとして \overline{L}_t を与える。図 7.2 は $t = \frac{1}{1}$ の場合を示している。

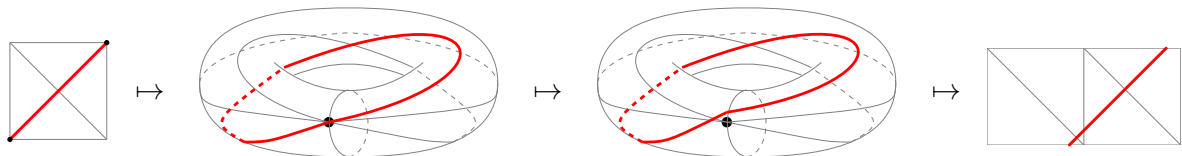


図 7.2 $t = \frac{1}{1}$ に対する、トーラス上のループとしての \overline{L}_t の解釈

次に、 $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ を固定して (k_1, k_2, k_3, σ) 一般化強許容列 $s(t)^{*1}$ を定義する。

*1 [Aig13] では「strongly admissible sequence」という語は本論文の意味での双無限列 $\infty s(t) \infty$ を指して用いられているが、ここではその単一ブロック $s(t)$ に対してこの名称を用いる。

まず

$$s\left(\frac{0}{1}\right) = (1 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)}, 1), \quad s\left(\frac{1}{0}\right) = (1 + k_{\sigma(1)} + k_{\sigma(2)}, 1)$$

とおく。任意の既約分数 $t \in (0, \infty)$ に対して $s(t)$ を次のように定義する：

- (1) \overline{L}_t に左下から右上への向きを入れる。任意の既約分数 $t \in (0, \infty)$ に対し、三角形横断規則および辺横断規則によって付された符号を \overline{L}_t がそれらを通る順に並べる。
- (2) (1) に現れる同符号の連続個数から整数列 $s(t) = (a_1, \dots, a_\ell)$ を作る。

例 7.4.2. $(k_1, k_2, k_3, \sigma) = (1, 2, 0, \text{id})$ かつ $t = \frac{2}{5}$ とする。図 7.3 は \overline{L}_t に沿った符号を示しており、

$$s\left(\frac{2}{5}\right) = (5, 1, 3, 3, 1, 5, 4, 1, 3, 4)$$

を得る。 \overline{L}_t の右端点は $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ の最も右上の辺の内部にあるので、この辺には符号は付与されない。 \overline{L}_t

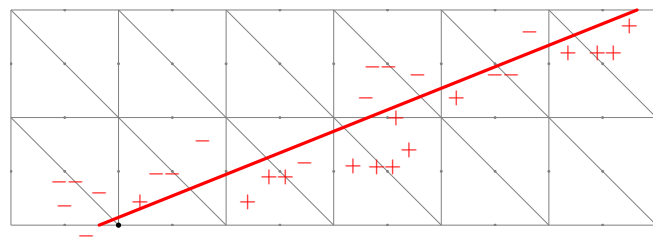


図 7.3 $t = \frac{2}{5}$ に対応する線分 \overline{L}_t と符号付け

と交わる唯一の水平な辺はその中点で交わっているように見えるが、実際には \overline{L}_t は（正確には、 \overline{L}_t を構成する前段階の L_t の時点）直線をわずかに左へずらして定められているため、交点は中点よりわずかに左にある。したがって対応する符号は (+) であることに注意せよ。

注 7.4.3. $s(t) = (a_0, \dots, a_n)$ とする。この数列の成分について、以下が成り立つ。

- (0) n は奇数である。
- (1) $a_0 = 2 + k_1 + k_2 + k_3$ が成り立つ。
- (2) $t = \frac{1}{1}$ ならば $s(t) = (2 + k_1 + k_2 + k_3, 2 + k_{\sigma(2)})$ となる。
- (3) $t \in (0, 1)$ ならば $a_1 = 1$ であり、 $a_n \neq 1$ である。一方 $t \in (1, \infty)$ ならば $a_1 \neq 1$ であり、 $a_n = 1$ である。
- (4) $t = \frac{1}{2}$ ならば $n = 3$ であり、 $a_3 = a_2 + 1 + k_t$ である。 $t = \frac{2}{1}$ ならば $n = 3$ であり、 $a_1 = a_2 + 1 + k_t$ である。
- (5) $t \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ ならば $a_2 + 1 = a_n$ であり、また $i = 1, 2, \dots, \frac{n-5}{2}$ に対して $a_{2+i} = a_{n-i}$ である ($n = 5$ のときこの関係式はないものとする)。さらに

$$a_{\frac{n+3}{2}} = a_{\frac{n+1}{2}} + (-1)^{\frac{n+1}{2}} k_t$$

が成り立つ。

- (6) $t \in (1, \frac{2}{1}) \cup (\frac{2}{1}, \infty)$ ならば $a_2 = a_{n-1} + 1$ であり $i = 1, 2, \dots, \frac{n-5}{2}$ に対して $a_{1+i} = a_{n-i-1}$ である ($n = 5$ のときこの関係式はないものとする)。さらに

$$a_{\frac{n+1}{2}} = a_{\frac{n-1}{2}} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} k_t$$

が成り立つ。

(7) $t \in (0, \infty)$ に対して、 $\frac{1}{t}$ に付随する $(k_1, k_2, k_3, \sigma^*)$ 一般化強許容列を $s^*(\frac{1}{t})$ とかくことにすると、これは $(a_0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ で与えられる $(L_t$ を原点を通る傾き 1 の直線で鏡映したときに符号がどう変化するかを考え、(3),(4),(5),(6) で与えられている符号列の対称性を適用するとわかる)。明らかに ${}^\infty(s^*(\frac{1}{t}))^\infty$ は ${}^\infty s(t)^\infty$ の逆向きの列である。この事実は $t = \frac{0}{1}$ および $\frac{1}{0}$ の場合にも成り立つ。

この節における主定理は以下の定理である。

定理 7.4.4. 任意の既約分数 $t \in (0, \infty]$ に対して $C_t = F_{s(t)}$ が成り立つ。

この定理を示す前に、6.3 節の最後で証明を後回しにした定理 6.3.17 がこの定理から直ちに従うことを見ておこう。

命題 6.3.17 (再掲). $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3, \sigma \in \mathfrak{S}_3$ を固定し、 p, q を互いに素である非負整数とする。このとき、 $A = (0, 0), B = (q, p)$ とすると

$$|\gamma_{AB}^R| = |\gamma_{AB}^L| = m_{\frac{p}{q}}$$

が成立する。特に、 $d(A, B) = m_{\frac{p}{q}}$ である。

証明. $s(t) = (a_0, \dots, a_n)$ とする。 $F_{s(t)}$ の成分表示に関する系 6.1.8 と $F_{s(t)}$ の成分表示に関する定理 7.2.1 を定理 7.4.4 によって結びつけることによって

$$\begin{bmatrix} Km_t - k_t - u_t & \frac{Km_t u_t - k_t u_t - u_t^2 - 1}{m_t} \\ m_t & u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(a_0, \dots, a_n) & N(a_0, \dots, a_{n-1}) \\ N(a_1, \dots, a_n) & N(a_1, \dots, a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

を得る。ここで (2, 1) 成分を比較すると、左辺は傾き t に対応する GM 数であり、右辺は \overline{L}_t の構成方法から $L_t (= \gamma_{AB}^L)$ の GM 長さを表していることがわかる。以上から主張が従う。□

定理を示すために、一旦 $t \in (0, 1)$ の範囲で考察を行う。以下、 $t \in (0, 1)$ を仮定する。まずは $s(t)$ から先頭の a_0 を落とした $s_-(t) = (a_1, \dots, a_n)$ が与える漸化挙動をみる。この数列は \overline{L}_t を L_t から構成するとき、端点を左側にずらしたことによって新たに出現した符号を落とした数列であり、 L_t に対する符号規則から得られる数列と一致する（ただし、 L_t が $\widetilde{\mathbb{R}}^2$ の点を通るケースがある場合があり、このときはこの点が接続されている辺に対応する個数分の符号 $+$ がこの辺に与えられる）。この数列に対応する \overline{L}_t 上の符号は任意の $t \in (0, 1)$ に対して $+$ から始まるが、これを $-$ に変えたものを $s'_-(t)$ とする。 $t \in (0, 1)$ では $a_1 = 1$ (注 7.4.3 (3)) であるから、

$$s'_-(t) = (a_2 + 1, a_3, \dots, a_n)$$

である。 $s'_-(t)$ を L_t に付随する有限数列とみなすと、 L_t の性質から次の命題が成り立つ。

命題 7.4.5. $t \in (0, 1)$ を満たすファレイトリプル (r, t, s) に対して、次の 3 つの主張が成り立つ。

(1) $r = \frac{0}{1}$ かつ $s \neq \frac{1}{1}$ であると仮定する。 $s'_-(s) = (b_1, \dots, b_m)$ ならば、

$$s'_-(t) = (b_m, b_{m-1}, \dots, b_1 - 1, 1, 2 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)})$$

が成り立つ。

(2) $r \neq \frac{0}{1}$ かつ $s = \frac{1}{1}$ であると仮定する。 $s'_-(r) = (a_1, \dots, a_\ell)$ ならば、

$$s'_-(t) = (2 + k_{\sigma(2)}, 2 + k_1 + k_2 + k_3, a_\ell, \dots, a_1)$$

が成り立つ。

(3) $r \neq \frac{0}{1}$ かつ $s \neq \frac{1}{1}$ であると仮定する。 $s'_-(r) = (a_1, \dots, a_\ell)$ かつ $s'_-(s) = (b_1, \dots, b_m)$ ならば、

$$s'_-(t) = (b_m, \dots, b_1 - 1, 1, 2 + k_1 + k_2 + k_3, a_\ell, \dots, a_1)$$

が成り立つ。

命題 7.4.5 (1),(2) の証明. L_t が通る $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上のすべての三角形がなす図形を $\mathcal{PG}(t)$ で表すことにする。

まず (1) を示す。 $r = \frac{0}{1}$ かつ $s \neq \frac{1}{1}$ という仮定のもとでは、ある $p \in \mathbb{Z}_{>1}$ が存在して $s = \frac{1}{p}$ と書ける。このとき $t = \frac{1}{p+1}$ の場合について主張を示せばよい。 $p \geq 2$ なので、 $\mathcal{PG}(\frac{1}{p+1})$ における最後の $2 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)}$ 個の符号はすべて + であり、その前の符号は - である (図 7.4 を参照)。

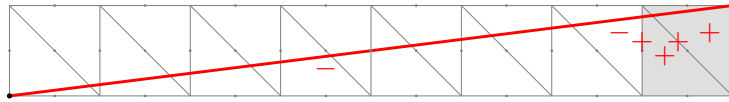


図 7.4 $k = 1$ および $p = 7$ のときの $\mathcal{PG}(\frac{1}{p+1})$

$\mathcal{PG}(\frac{1}{p+1})$ から最後の 2 つの直角三角形からなる正方形を取り除いたあとの符号列と、 $\mathcal{PG}(\frac{1}{p})$ の符号列とを比較する (図 7.4 の白色部分と図 7.5 を比較せよ)。前者のグラフを $\mathcal{SPG}(\frac{1}{p+1})$ と書くことにする。

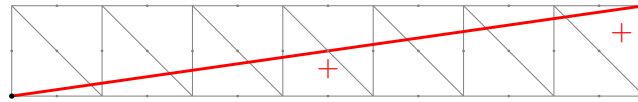


図 7.5 $k = 1$ および $p = 7$ のときの $\mathcal{PG}(\frac{1}{p})$

$\mathcal{SPG}(\frac{1}{p+1})$ と $\mathcal{PG}(\frac{1}{p})$ とで異なるのは、中央の辺と最後の三角形に対応する符号だけであることを示す。これら 2 箇所の符号が異なることは明らかである。したがって、それ以外のすべての符号が一致することを示せばよい。まず、直角三角形に付与される符号は明らかに一致する。次に、縦辺に付与される符号を考える。 $\mathcal{PG}(\frac{1}{p})$ の左から a 番目の縦辺と線分 $L_{\frac{1}{p}}$ との交点の高さは $\frac{a}{p}$ である。また、 $\mathcal{SPG}(\frac{1}{p+1})$ の左から a 番目の縦辺と線分 $L_{\frac{1}{p+1}}$ との交点の高さは $\frac{a}{p+1}$ である。 $\frac{a}{p} > \frac{a}{p+1}$ なので、「 $\frac{a}{p} < \frac{1}{2}$ ならば $\frac{a}{p+1} < \frac{1}{2}$ である」ことは簡単にわかり、 $\mathcal{PG}(\frac{1}{p})$ の (-) の符号は $\mathcal{SPG}(\frac{1}{p+1})$ においても保たれることがわかる。したがって (+) の符号の保存性、すなわち「 $\frac{a}{p} > \frac{1}{2}$ ならば $\frac{a}{p+1} \geq \frac{1}{2}$ である」ことを示せば十分である。仮定から $2a \geq p + 1$ より

$$\frac{1}{2} - \frac{a}{p+1} = \frac{p - 2a + 1}{2(p+1)} \leq 0$$

となり、所望の不等式が従う。斜辺に付与される符号についても同様に示すことができる。したがって、 $\mathcal{SPG}(\frac{1}{p+1})$ と $\mathcal{PG}(\frac{1}{p})$ とでは、中央の辺及び最後の三角形に対応する符号だけが異なる。このとき、注 7.4.3 (4),(5) の対称性から、 $\mathcal{PG}(\frac{1}{p})$ の中央の符号が変化すると数列自体は反転することがわ

かる。したがって $SPG(\frac{1}{p+1})$ の符号列から構成される数列は $(b_m, b_{m-1}, \dots, b_1 - 1, 1)$ である。これに $PG(\frac{1}{p+1})$ の最後のタイルに対応する $2 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)}$ 個の符号から得られる値を組み合わせて、主張が従う。

次に (2) を示す。 $r \neq \frac{0}{1}$ かつ $s = \frac{1}{1}$ という仮定のもとでは、ある $p \in \mathbb{Z}_{>1}$ が存在して $r = \frac{p}{p+1}$ と書ける。このとき $t = \frac{p+1}{p+2}$ の場合について主張を示せばよい。 $p \geq 2$ なので、 $PG(\frac{p+1}{p+2})$ における最初の $4 + k_{\sigma(1)} + 2k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)}$ 個の符号は、 $2 + k_{\sigma(2)}$ 個の $-$ と $2 + k_1 + k_2 + k_3$ 個の $+$ からなる (図 7.6 を参照)。

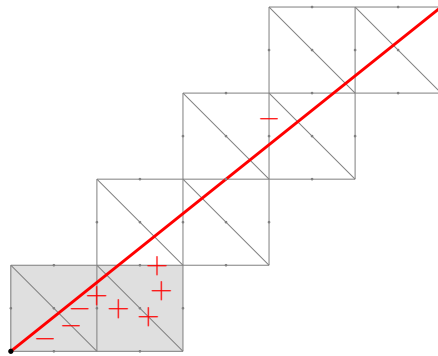


図 7.6 $k = 1$ および $p = 3$ のときの $PG(\frac{p+1}{p+2})$

$PG(\frac{p+1}{p+2})$ から最初の 2 つのタイルを取り除いたあとの符号列と、 $PG(\frac{p}{p+1})$ の符号列とを比較する (図 7.6 と図 7.7 を比較せよ)。前者のグラフを $SPG(\frac{p+1}{p+2})$ と書くことにする。

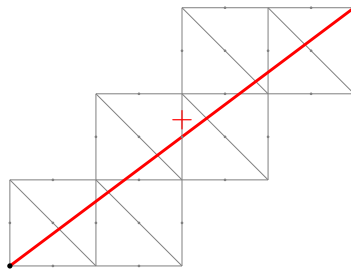


図 7.7 $k = 1$ および $p = 3$ のときの $PG(\frac{p}{p+1})$

$SPG(\frac{p+1}{p+2})$ と $PG(\frac{p}{p+1})$ とで異なるのは、中央の辺に対応する符号だけであることを示す。この箇所の符号が異なることは明らかである。したがって、それ以外のすべての符号が一致することを示せばよい。まず、直角三角形に付与される符号は明らかに一致する。 $PG(\frac{p}{p+1})$ の左から $a + 1$ 番目の縦辺と線分 $L_{\frac{p}{p+1}}$ との交点の高さは $\frac{ap}{p+1}$ であり、 $SPG(\frac{p+1}{p+2})$ の左から $a + 1$ 番目の縦辺と線分 $L_{\frac{p+1}{p+2}}$ との交点の高さは $\frac{(a+1)(p+1)}{p+2} - 1$ である (原点を $SPG(\frac{p+1}{p+2})$ の左下の点に取っている)。したがって、

$$\frac{ap}{p+1} - (a-1) > \frac{1}{2} \text{ ならば } \frac{(a+1)(p+1)}{p+2} - 1 - (a-1) \geq \frac{1}{2}$$

の成立を示せば良い。実際、 $2a \leq p$ より

$$\frac{1}{2} - \frac{(a+1)(p+1)}{p+2} + 1 + (a-1) = \frac{2a-p}{2(p+2)} \leq 0$$

となり、所望の不等式が従う。斜辺および横辺に付与される符号についても同様に示すことができる。以降の議論は (1) の場合と同じである。□

命題 7.4.5 の (3) を証明するために、上クリストッフェル語を思い出そう。\$X\$ と \$Y\$ からなる語全体の集合を \$\{X, Y\}^*\$ と書く。既約分数 \$\frac{a}{b}\$ をとる。\$1 \leq i \leq b+1\$ に対して、\$\mathcal{PG}(t)\$ における左から \$i\$ 番目の縦線と \$L_t\$ の交点の高さを \$y_i\$ と書く。ここで、\$x\$ 以上の整数の中で最小の数を \$\lceil x \rceil\$ と書く。\$\frac{a}{b}\$ に付随する上クリストッフェル語 \$\text{uch}_{a/b}\$ を、

$$\text{uch}_{a/b} := w_1 \cdots w_b \in \{X, Y\}^*$$

で定める。ただし

$$w_i = \begin{cases} X & (\lceil y_{i+1} \rceil - \lceil y_i \rceil = 1 \text{ のとき}) \\ Y & (\lceil y_{i+1} \rceil - \lceil y_i \rceil = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

例 7.4.6. \$\frac{2}{5}\$ の上クリストッフェル語 \$\text{uch}_{2/5}\$ は \$XYXY Y\$ である。図 7.8 も参照せよ。

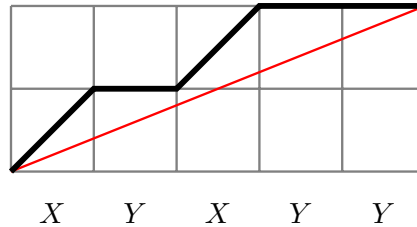


図 7.8 上クリストッフェル語 \$\text{uch}_{2/5}\$

定理 7.4.7. \$(r, t, s) \in \text{FT}\$ に対して、\$t \neq \frac{1}{0}\$ であると仮定する。

$$\text{uch}_t = \text{uch}_s \cdot \text{uch}_r$$

が成り立つ。ただし \$\cdot\$ は語を連結する操作を表すこととする。

証明. \$r = \frac{a}{b}, s = \frac{c}{d}\$ を既約分数とする。\$(r, t, s) \in \text{FT}\$ より \$r < t < s\$ かつ \$bc - ad = 1\$ が成り立つ。したがって \$t = \frac{a+c}{b+d}\$ である。上クリストッフェル語の定義より

$$\Delta_i(u) := \lceil iu \rceil - \lceil (i-1)u \rceil$$

とおくと \$\text{uch}_u\$ の第 \$i\$ 文字は \$\Delta_i(u)\$ によって決まる。

まず \$1 \leq i \leq d\$ に対して \$\Delta_i(t) = \Delta_i(s)\$ を示す。

$$s - t = \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc - ad}{d(b+d)} = \frac{1}{d(b+d)}$$

より \$1 \leq i \leq d-1\$ について

$$0 < is - it < \frac{1}{d}$$

が成り立つ。一方、\$\text{gcd}(c, d) = 1\$ なので \$is \notin \mathbb{Z}\$ であり、その小数部分は \$1/d\$ 以上である。したがって

$$\lceil it \rceil = \lceil is \rceil \quad (1 \leq i \leq d-1)$$

となる。また

$$dt = c - \frac{1}{b+d}$$

より $\lceil dt \rceil = c = \lceil ds \rceil$ である。したがって $\Delta_i(t) = \Delta_i(s)$ ($1 \leq i \leq d$) が従う。

次に $1 \leq j \leq b$ に対して $\Delta_{d+j}(t) = \Delta_j(r)$ を示す。

$$(d+j)t - c = \frac{(d+j)(a+c)}{b+d} - c = jr + \frac{j-b}{b(b+d)}$$

であるから、 $1 \leq j \leq b-1$ に対して

$$0 < jr - ((d+j)t - c) < \frac{1}{b}$$

が成り立つ。 $\gcd(a, b) = 1$ より $jr \notin \mathbb{Z}$ であり、その小数部分は $1/b$ 以上なので

$$\lceil (d+j)t \rceil - c = \lceil jr \rceil \quad (1 \leq j \leq b-1)$$

となる。 $j = b$ の場合も直接計算により同様に成り立つ。したがって

$$\Delta_{d+j}(t) = \lceil (d+j)t \rceil - \lceil (d+j-1)t \rceil = \lceil jr \rceil - \lceil (j-1)r \rceil = \Delta_j(r)$$

が従う。以上から uch_t の語の長さが $b+d$ であることに注意すると

$$\text{uch}_t = (\text{uch}_s \text{ の長さ } d \text{ の部分}) \cdot (\text{uch}_r \text{ の長さ } b \text{ の部分})$$

となるので、 $\text{uch}_t = \text{uch}_s \cdot \text{uch}_r$ が成り立つ。 □

上の定理から、 $\mathcal{PG}(t)$ の次の分解が得られる。

系 7.4.8. $t \in (0, 1)$ を満たす $(r, t, s) \in \text{FT}$ に対して、 $\mathcal{PG}(t)$ は左下から右上へ順に、 $\mathcal{PG}(s)$ 、1 つのタイル、 $\mathcal{PG}(r)$ に分解される。

命題 7.4.5(3) の証明. 系 7.4.8 により、 $\mathcal{PG}(t)$ は $\mathcal{PG}(s)$ 、1 つのタイル、 $\mathcal{PG}(r)$ に分解される (r と s の順番は反転することに注意、図 7.9 を参照)。 $\mathcal{PG}(t)$ における $\mathcal{PG}(s)$ 部分を $\mathcal{SPG}(s)$ 、 $\mathcal{PG}(r)$ 部分を $\mathcal{SPG}(r)$ と書くことにする。なお、この分解における第 2 成分のタイルに付与される符号はすべて + であることに注意する。

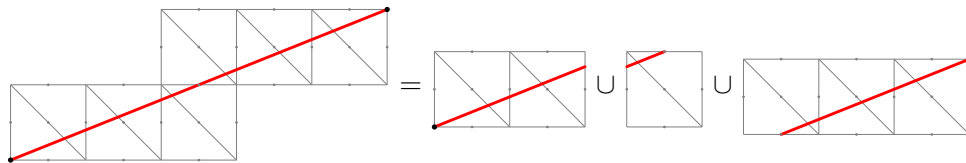


図 7.9 $r = \frac{1}{3}$, $t = \frac{2}{5}$, $s = \frac{1}{2}$ のときの $\mathcal{PG}(t)$ の分解

$r = \frac{a}{b}$, $s = \frac{c}{d}$ と仮定する。 $\mathcal{SPG}(s)$ の最も右上の点から、その点を端点として持つ垂直辺と L_t の交点までの長さは $\frac{1}{b+d}$ であり、また $\mathcal{SPG}(r)$ の最も左下の点からその点を端点として持つ水平辺と L_t との交点までの長さは $\frac{1}{a+c}$ である。 $\mathcal{SPG}(s)$ の符号列と $\mathcal{PG}(s)$ の符号列とを比較すると、(1) と同じ議論によって、最後の三角形および中央の辺における符号を除いてすべて一致することがわかる。さらに、 $\mathcal{SPG}(r)$ の符号列と $\mathcal{PG}(r)$ の符号列とを比較すると、(2) と同じ議論によって、中央の辺における符号を除いてすべて一致することがわかる。したがって結論が得られる。 □

今まで s'_- で議論した命題を s_- で言い換え、以後はこれを使用する。

系 7.4.9. $t \in (0, 1)$ を満たすファレイトリプル (r, t, s) に対して、次の3つの主張が成り立つ。

(1) $r = \frac{0}{1}$ かつ $s \neq \frac{1}{1}$ であると仮定する。 $s_-(s) = (b_1, \dots, b_m)$ ならば、

$$s_-(t) = (1, b_m - 1, b_{m-1}, \dots, b_1, 2 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)})$$

が成り立つ。

(2) $r \neq \frac{0}{1}$ かつ $s = \frac{1}{1}$ であると仮定する。 $s_-(r) = (a_1, \dots, a_\ell)$ ならば、

$$s_-(t) = (1, 1 + k_{\sigma(2)}, 2 + k_1 + k_2 + k_3, a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1)$$

が成り立つ。

(3) $r \neq \frac{0}{1}$ かつ $s \neq \frac{1}{1}$ であると仮定する。 $s_-(r) = (a_1, \dots, a_\ell)$ かつ $s_-(s) = (b_1, \dots, b_m)$ ならば、

$$s_-(t) = (1, b_m - 1, b_{m-1}, \dots, b_1, 2 + k_1 + k_2 + k_3, a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1)$$

が成り立つ。

証明に必要な順序イデアルの個数に関する関係式を導入しておく。以下では、任意の有限整数列 $S = (x_1, \dots, x_m)$ に対して

$$F_S := \prod_{i=1}^m \begin{bmatrix} x_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N(S) := (F_S)_{11}$$

によって $N(S)$ を定める。また、漸化式を端点で用いるため、 $N(\emptyset) = 1$ 、長さ -1 の列に対応する項は 0 と約束する。

補題 7.4.10. $a, b, k, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, μ を整数列とする。このとき、次の関係式が成立する。ただし(2)では $n \geq 2$ とする。

$$(1) \quad N(a, 1, b, \mu) = (a + 1)N(b + 1, \mu) - N(\mu)$$

$$(2) \quad N(a_2, \dots, a_n + k, a_n, \dots, a_1) = N(a_1, \dots, a_n + k, a_n, \dots, a_2) + (-1)^n k$$

証明. 有限整数列 $S = (x_1, \dots, x_m)$ に対して

$$F_x := \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_S := F_{x_1} \cdots F_{x_m}$$

とおく。定義より

$$N(S) = (F_S)_{11}$$

である。まずこの行列表示から以後使う基本公式をまとめておく。

主張 1. 任意の有限整数列 (x_1, \dots, x_m) に対して、上の空列・長さ -1 の列の規約のもとで

$$N(x_1, \dots, x_m) = x_1 N(x_2, \dots, x_m) + N(x_3, \dots, x_m) \tag{7.4.1}$$

が成り立つ。これは(6.1.1)と命題6.1.9から直ちに従う。

主張 2. 任意の整数 c と整数列 ν に対して

$$N(c + 1, \nu) = N(c, \nu) + N(\nu) \tag{7.4.2}$$

が成り立つ。

実際、(7.4.1) を $x_1 = c + 1$ に適用すると

$$N(c + 1, \nu) = (c + 1)N(\nu) + N(\nu')$$

となる。ただし ν' は ν の先頭を除いた列である。一方、

$$N(c, \nu) = cN(\nu) + N(\nu')$$

であるから、差を取れば (7.4.2) を得る。以上を用いて (1), (2) を示す。

まず (1) を示そう。(7.4.1) と命題 6.1.9 を用いると

$$N(a, 1, b, \mu) = aN(b + 1, \mu) + N(b, \mu)$$

である。さらに (7.4.2) から

$$N(b, \mu) = N(b + 1, \mu) - N(\mu)$$

を得る。これらを代入すると

$$\begin{aligned} N(a, 1, b, \mu) &= aN(b + 1, \mu) + N(b, \mu) = aN(b + 1, \mu) + (N(b + 1, \mu) - N(\mu)) \\ &= (a + 1)N(b + 1, \mu) - N(\mu). \end{aligned}$$

よって (1) が示された。

次に (2) を示す。 $n \geq 2$ とする。以下

$$P := F_{a_2} \cdots F_{a_{n-1}} = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

とおく。さらに $A_1 := F_{a_1}$, $A_n := F_{a_n}$ とおく。ただし $n = 2$ のときは $P = E_2$ とみなす。各 F_x は対称行列なので

$$P^T = F_{a_{n-1}} \cdots F_{a_2}$$

である。また

$$E_{11} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと

$$F_{a_n+k} = F_{a_n} + kE_{11}$$

が成り立つ。いま

$$\Delta(k) := N(a_2, \dots, a_n + k, a_n, \dots, a_1) - N(a_1, \dots, a_n + k, a_n, \dots, a_2)$$

とおく。このとき定義より

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= (PF_{a_n+k}A_nP^T A_1)_{11} - (A_1PF_{a_n+k}A_nP^T)_{11} \\ &= (P(A_n + kE_{11})A_nP^T A_1)_{11} - (A_1P(A_n + kE_{11})A_nP^T)_{11}. \end{aligned}$$

分配法則で展開すると

$$\Delta(k) = \left((PA_nA_nP^T A_1)_{11} - (A_1PA_nA_nP^T)_{11} \right) + k \left((PE_{11}A_nP^T A_1)_{11} - (A_1PE_{11}A_nP^T)_{11} \right).$$

ここで第1項は $\Delta(0)$ であるが $(a_2, \dots, a_n, a_n, \dots, a_1)$ と $(a_1, \dots, a_n, a_n, \dots, a_2)$ は互いに逆順の列であるから命題 6.1.9 (1) より $\Delta(0) = 0$ である。したがって

$$\Delta(k) = k \left((PE_{11}A_nP^T A_1)_{11} - (A_1PE_{11}A_nP^T)_{11} \right). \quad (7.4.3)$$

以下、括弧内を計算する。まず

$$PE_{11} = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix},$$

したがって

$$PE_{11}A_n = \begin{bmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pa_n & p \\ qa_n & q \end{bmatrix}.$$

さらに

$$P^T = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

であるから

$$PE_{11}A_nP^T = \begin{bmatrix} pa_n & p \\ qa_n & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(a_np + r) & p(a_nq + s) \\ q(a_np + r) & q(a_nq + s) \end{bmatrix}.$$

よって

$$(PE_{11}A_nP^T A_1)_{11} = \begin{bmatrix} p(a_np + r) & p(a_nq + s) \\ q(a_np + r) & q(a_nq + s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1p(a_np + r) + p(a_nq + s),$$

また

$$(A_1PE_{11}A_nP^T)_{11} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(a_np + r) \\ q(a_np + r) \end{bmatrix} = a_1p(a_np + r) + q(a_np + r).$$

したがって

$$\begin{aligned} (PE_{11}A_nP^T A_1)_{11} - (A_1PE_{11}A_nP^T)_{11} &= (a_1p(a_np + r) + p(a_nq + s)) - (a_1p(a_np + r) + q(a_np + r)) \\ &= p(a_nq + s) - q(a_np + r) = pa_nq + ps - qa_np - qr = ps - qr = \det P. \end{aligned}$$

各 F_x の行列式は -1 であるから

$$\det P = (-1)^{n-2} = (-1)^n.$$

これを (7.4.3) に代入すると $\Delta(k) = (-1)^n k$ を得る。すなわち

$$N(a_2, \dots, a_n + k, a_n, \dots, a_1) = N(a_1, \dots, a_n + k, a_n, \dots, a_2) + (-1)^n k.$$

これで (2) が示された。 □

補題 7.4.10 (1) の一般化版として次の等式も成り立つ。

補題 7.4.11. 空列を \emptyset とし、

$$N(\emptyset) = 1, \quad N(\emptyset, \lambda) = N(\lambda)$$

と約束する。このとき、任意の有限正整数列 ν, μ と $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して

$$N(\nu, a, 1, b, \mu) = N(\nu, a + 1)N(b + 1, \mu) - N(\nu)N(\mu)$$

が成り立つ。

証明. ν の長さに関する帰納法で示す。まず $\nu = \emptyset$ のとき、主張は

$$N(a, 1, b, \mu) = (a + 1)N(b + 1, \mu) - N(\mu)$$

で、これは補題 7.4.10 (1) ですでに示した。

次に $|\nu| \geq 1$ とし、 $\nu = (c, \nu')$ と書く。さらに、 $\nu' = (\nu_2, \dots, \nu_r)$ の先頭をもう一つ落とした列を ν'' とする ($|\nu| = 1$ のときは $\nu' = \nu'' = \emptyset$ とする)。 N の漸化式より、

$$N(\nu, a, 1, b, \mu) = cN(\nu', a, 1, b, \mu) + N(\nu'', a, 1, b, \mu)$$

を得る。ここで帰納法の仮定を ν' と ν'' に適用すると

$$\begin{aligned} N(\nu, a, 1, b, \mu) &= c \left(N(\nu', a + 1)N(b + 1, \mu) - N(\nu')N(\mu) \right) + \left(N(\nu'', a + 1)N(b + 1, \mu) - N(\nu'')N(\mu) \right) \\ &= \left(cN(\nu', a + 1) + N(\nu'', a + 1) \right) N(b + 1, \mu) - \left(cN(\nu') + N(\nu'') \right) N(\mu). \end{aligned}$$

再び N の漸化式を用いると、

$$cN(\nu', a + 1) + N(\nu'', a + 1) = N(\nu, a + 1), \quad cN(\nu') + N(\nu'') = N(\nu)$$

であるから、

$$N(\nu, a, 1, b, \mu) = N(\nu, a + 1)N(b + 1, \mu) - N(\nu)N(\mu)$$

を得る。よって示された。 \square

補題 7.4.12. $\alpha = (a_1, \dots, a_r)$, $\beta = (b_1, \dots, b_s)$ を正整数の非空有限数列とする。 (α, β) で α と β の連結を表す。また、 α^- は最後の項を除いた列、 $-\alpha$ は最初の項を除いた列、 $-\alpha^-$ は最初と最後の項を除いた列を表すものとし、 β についても同様に定める。空列に対しては $N(\emptyset) = 1$ 、長さ -1 の列に対応する項は 0 と約束する。このとき

$$N(\alpha, \beta) = N(\alpha)N(\beta) + N(\alpha^-)N(-\beta)$$

が成り立つ。

証明. 系 6.1.8 より、

$$F_\alpha = \begin{bmatrix} N(\alpha) & N(\alpha^-) \\ N(-\alpha) & N(-\alpha^-) \end{bmatrix}, \quad F_\beta = \begin{bmatrix} N(\beta) & N(\beta^-) \\ N(-\beta) & N(-\beta^-) \end{bmatrix}$$

である。

また、 F_α の定義から $F_{\alpha, \beta} = F_\alpha F_\beta$ が成り立つ。したがって、

$$F_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} N(\alpha) & N(\alpha^-) \\ N(-\alpha) & N(-\alpha^-) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(\beta) & N(\beta^-) \\ N(-\beta) & N(-\beta^-) \end{bmatrix}.$$

この右辺の (1, 1) 成分は $N(\alpha)N(\beta) + N(\alpha^-)N(-\beta)$ である。一方、再び系 6.1.8 より $F_{\alpha, \beta}$ の (1, 1) 成分は $N(\alpha, \beta)$ である。よって (1, 1) 成分を比較して

$$N(\alpha, \beta) = N(\alpha)N(\beta) + N(\alpha^-)N(-\beta)$$

を得る。 \square

以上を踏まえて、定理 7.4.4 を示す。\$t \in (0, 1]\$ の範囲では帰納法を使って示し、それ以外のところでは \$t \in (0, 1]\$ の結果を利用して示す。

定理 7.4.4 の証明. まず \$t \in (0, 1]\$ を仮定し、この範囲で主張が成り立つことを示す。\$t = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}\$ の場合は直接計算で確かめることができる。まず \$t = \frac{1}{p-1}, \frac{1}{p}\$ (ただし \$p \ge 2\$) の場合に定理の成立を仮定して \$t = \frac{1}{p+1}\$ の場合で成り立つことを示す。系 7.4.9 から、

$$s\left(\frac{1}{p}\right) = (2 + k_1 + k_2 + k_3, b_1, b_2, \dots, b_m)$$

なる表示がとれ、これを使って

$$s\left(\frac{1}{p+1}\right) = (2 + k_1 + k_2 + k_3, 1, b_m - 1, b_{m-1}, \dots, b_1, 2 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)})$$

とかける。したがって、

$$F_{s\left(\frac{1}{p+1}\right)} = \begin{bmatrix} N(K - 1, 1, b_m - 1, b_{m-1}, \dots, b_1, 2 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)}) & N(K - 1, 1, b_m - 1, b_{m-1}, \dots, b_1) \\ N(1, b_m - 1, b_{m-1}, \dots, b_1, 2 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)}) & N(1, b_m - 1, b_{m-1}, \dots, b_1) \end{bmatrix}$$

となる。一方、\$C_{\frac{1}{p+1}} = C_{\frac{0}{1}}C_{\frac{1}{p}} - D_{\frac{1}{p-1}}\$ であるから、\$C_{\frac{1}{p}}\$ に帰納法の仮定を利用したものを考え、\$F_{s\left(\frac{1}{p+1}\right)}\$ と \$C_{\frac{1}{p+1}}\$ の成分を比較する。ここで、\$\det(C_{\frac{1}{p+1}}) = \det(F_{s\left(\frac{1}{p+1}\right)}) = 1\$ であることが補題 2.2.5、注 7.4.3 (0)、定理 7.2.1 からわかっているので、(1, 1) 成分、(2, 1) 成分、(1, 2) 成分のみを比較すれば良い。したがって示すべきは

$$\begin{aligned} & N(K - 1, 1, b_m - 1, b_{m-1}, \dots, b_1, 2 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)}) \\ &= KN(K - 1, b_1, \dots, b_m) - Kk_{\sigma(1)}N(b_1, \dots, b_m) - N(b_1, \dots, b_m) - k_{\frac{1}{p-1}} \end{aligned} \tag{7.4.4}$$

$$N(1, b_m - 1, b_{m-1}, \dots, b_1, 2 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)}) = N(K - 1, 1, b_2 - 1, \dots, b_m) - k_{\sigma(1)}N(b_1, \dots, b_m) \tag{7.4.5}$$

$$N(1, b_m - 1, b_{m-1}, \dots, b_1) = N(K - 1, 1, b_2 - 1, \dots, b_{m-1}) - k_{\sigma(1)}N(b_1, \dots, b_{m-1}) - k_{\frac{1}{p-1}} \tag{7.4.6}$$

の3つの式である。(7.4.4) を示す。左辺に補題 7.4.10 (1) を適用して

$$\begin{aligned} & N(K - 1, 1, b_m - 1, b_{m-1}, \dots, b_1, 2 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)}) \\ &= KN(b_m, \dots, b_1, 2 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)}) - N(b_{m-1}, \dots, b_1, 2 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)}) \end{aligned}$$

を得る。さらに、\$b_1 = 1\$ であるから命題 6.1.9 (1) を適用して数列の順番を逆転させ、さらに補題 7.4.10 (1) を適用して

$$\begin{aligned} & KN(b_m, \dots, b_1, 2 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)}) - N(b_{m-1}, \dots, b_1, 2 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)}) \\ &= (K - k_{\sigma(1)})KN(b_2 + 1, \dots, b_m) - KN(b_3, \dots, b_m) - (K - k_{\sigma(1)})N(b_2 + 1, \dots, b_{m-1}) \\ &+ N(b_3, \dots, b_{m-1}) \end{aligned}$$

を得る。一方で右辺の第1項に対して補題 7.4.10 (1) を適用して

$$\begin{aligned} & KN(K - 1, b_1, \dots, b_m) - Kk_{\sigma(1)}N(b_1, \dots, b_m) - N(b_1, \dots, b_m) - k_{\frac{1}{p-1}} \\ &= K^2N(b_2 + 1, \dots, b_m) - KN(b_3, \dots, b_m) - Kk_{\sigma(1)}N(b_1, \dots, b_m) - N(b_1, \dots, b_m) - k_{\frac{1}{p-1}} \end{aligned}$$

さらに、\$r = \frac{0}{1}, t = \frac{1}{p}, s = \frac{1}{p-1}\$ に対して系 7.4.9 を適用することで \$b_{m-1} = 1, b_m = 2 + k_{\sigma(2)} + k_{\sigma(3)}\$ がわかるので、直前の式の第4項に対して補題 7.4.10 (1) を適用することで

$$K^2N(b_2 + 1, \dots, b_m) - KN(b_3, \dots, b_m) - Kk_{\sigma(1)}N(b_1, \dots, b_m) - N(b_1, \dots, b_m) - k_{\frac{1}{p-1}}$$

$$= K^2 N(b_2 + 1, \dots, b_m) - KN(b_3, \dots, b_m) - Kk_{\sigma(1)}N(b_1, \dots, b_m) - (K - k_{\sigma(1)})N(b_1, \dots, b_{m-2} + 1) + N(b_1, \dots, b_{m-3}) - k_{\frac{1}{p-1}}$$

を得る。ここで $N(b_1, \dots, b_{m-2} + 1) = N(b_1, \dots, b_{m-1})$ と変形して右辺から計算した式と左辺から計算した式を比較すると、等号が成り立つためにはこの差をとった

$$E = N(b_3, \dots, b_{m-2} + 1) - N(b_2 + 1, \dots, b_{m-3}) + k_{\frac{1}{p-1}}$$

が 0 であることを示せばよいことになる。注 7.4.3 (5) で与えられる対称性を考慮すると、この式は補題 7.4.10 (2) から従うことがわかる。よって (7.4.4) が示された。(7.4.5), (7.4.6) についても同様の変形を用いることで証明できる (これらは演習問題とする)。

次に $t = \frac{p-1}{p}, \frac{p}{p+1}$ の場合に定理の成立を仮定して $t = \frac{p+1}{p+2}$ の場合を示す。系 7.4.9 から、

$$s\left(\frac{p}{p+1}\right) = (2 + k_1 + k_2 + k_3, a_1, a_2, \dots, a_\ell)$$

なる表示がとれ、これを使って

$$s\left(\frac{p+1}{p+2}\right) = (2 + k_1 + k_2 + k_3, 1, 1 + k_{\sigma(2)}, 2 + k_1 + k_2 + k_3, a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1)$$

とかける。したがって、

$$F_{s\left(\frac{p+1}{p+2}\right)} = \begin{bmatrix} N(K-1, 1, 1 + k_{\sigma(2)}, K-1, a_\ell, \dots, a_2 + 1) & N(K-1, 1, 1 + k_{\sigma(2)}, K-1, a_\ell, \dots, a_3) \\ N(1, 1 + k_{\sigma(2)}, K-1, a_\ell, \dots, a_2 + 1) & N(1, 1 + k_{\sigma(2)}, K-1, a_\ell, \dots, a_3) \end{bmatrix}$$

となる。一方、 $C_{\frac{p+1}{p+2}} = C_{\frac{p}{p+1}} C_{\frac{1}{p}} - D_{\frac{p-1}{p}}$ であるから、 $C_{\frac{p+1}{p+2}}$ に帰納法の仮定を利用したものと考え、 $F_{s\left(\frac{p+1}{p+2}\right)}$ と $C_{\frac{p+1}{p+2}}$ の成分を比較する。直前の場合と同じ理由から (1, 1) 成分、(2, 1) 成分、(1, 2) 成分のみを比較すれば良い。したがって示すべきは

$$\begin{aligned} & N(K-1, 1, 1 + k_{\sigma(2)}, K-1, a_\ell, \dots, a_2 + 1) \\ &= (K(k_{\sigma(2)} + 2) - k_{\sigma(2)} - 1)N(K-1, a_1, \dots, a_\ell) + (k_{\sigma(2)} + 2)N(K-1, a_1, \dots, a_{\ell-1}) - k_{\frac{p-1}{p}} \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

$$\begin{aligned} & N(1, 1 + k_{\sigma(2)}, K-1, a_\ell, \dots, a_2 + 1) \\ &= (K(k_{\sigma(2)} + 2) - k_{\sigma(2)} - 1)N(a_1, \dots, a_\ell) + (k_{\sigma(2)} + 2)N(a_1, \dots, a_{\ell-1}) \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

$$N(1, 1 + k_{\sigma(2)}, K-1, a_\ell, \dots, a_3) = (K-1)N(a_1, \dots, a_\ell) + N(a_1, \dots, a_{\ell-1}) - k_{\frac{p-1}{p}} \quad (7.4.9)$$

の 3 つの式である。

まず、注 7.4.3 (3) から $a_1 = 1$ が成り立つことに注意する。したがって、命題 6.1.9 を用いることで

$$N(a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1) = N(a_2 + 1, a_3, \dots, a_\ell) = N(1, a_2, \dots, a_\ell) = N(a_1, \dots, a_\ell),$$

$$N(a_{\ell-1}, \dots, a_3, a_2 + 1) = N(a_2 + 1, a_3, \dots, a_{\ell-1}) = N(1, a_2, \dots, a_{\ell-1}) = N(a_1, \dots, a_{\ell-1})$$

を得る。この同一視は以後断り無しに使う。

まず (7.4.7) を示す。左辺に補題 7.4.10 (1) を適用すると

$$\begin{aligned} & N(K-1, 1, 1 + k_{\sigma(2)}, K-1, a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1) \\ &= KN(k_{\sigma(2)} + 2, K-1, a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1) - N(K-1, a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1) \end{aligned}$$

となる。さらに上式の第1項と第2項に (7.4.1) を適用するとそれぞれ

$$\begin{aligned} & KN(k_{\sigma(2)} + 2, K - 1, a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1) \\ &= K(k_{\sigma(2)} + 2)N(K - 1, a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1) + KN(a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1), \\ &N(K - 1, a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1) = (K - 1)N(a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1) + N(a_{\ell-1}, \dots, a_3, a_2 + 1) \end{aligned}$$

であり、前者の式の第1項にさらに (7.4.1) を適用すると

$$\begin{aligned} & K(k_{\sigma(2)} + 2)N(K - 1, a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1) \\ &= K(K - 1)(k_{\sigma(2)} + 2)N(a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1) + K(k_{\sigma(2)} + 2)N(a_{\ell-1}, \dots, a_3, a_2 + 1) \end{aligned}$$

これを代入することで (7.4.7) の左辺は

$$\left(K(K - 1)(k_{\sigma(2)} + 2) + 1 \right) N(a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1) + \left(K(k_{\sigma(2)} + 2) - 1 \right) N(a_{\ell-1}, \dots, a_3, a_2 + 1). \quad (7.4.10)$$

となる。次に (7.4.7) の右辺について、第1項、第2項ともに補題 7.4.10 (1) を適用してそれぞれ

$$\begin{aligned} & (K(k_{\sigma(2)} + 2) - k_{\sigma(2)} - 1)N(K - 1, a_1, \dots, a_\ell) \\ &= K(K(k_{\sigma(2)} + 2) - k_{\sigma(2)} - 1)N(a_2 + 1, \dots, a_\ell) - (K(k_{\sigma(2)} + 2) - k_{\sigma(2)} - 1)N(a_3, \dots, a_\ell), \\ &(k_{\sigma(2)} + 2)N(K - 1, a_1, \dots, a_{\ell-1}) = K(k_{\sigma(2)} + 2)N(a_2 + 1, \dots, a_{\ell-1}) - (k_{\sigma(2)} + 2)N(a_3, \dots, a_{\ell-1}) \end{aligned}$$

を得る。これらを右辺に代入することで

$$\begin{aligned} & K \left(\left((K - 1)(k_{\sigma(2)} + 2) + 1 \right) N(a_2 + 1, \dots, a_\ell) + (k_{\sigma(2)} + 2)N(a_2 + 1, \dots, a_{\ell-1}) \right) \\ & - \left(\left((K - 1)(k_{\sigma(2)} + 2) + 1 \right) N(a_3, \dots, a_\ell) + (k_{\sigma(2)} + 2)N(a_3, \dots, a_{\ell-1}) \right) - k_{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned} \quad (7.4.11)$$

を得る。主張を得るためには (7.4.10) と (7.4.11) の差が0であることを示せば良い。実際に差を取ったものを E とすると

$$\begin{aligned} E &= (K - 1)N(a_2 + 1, \dots, a_\ell) + N(a_2 + 1, \dots, a_{\ell-1}) - \left((K - 1)(k_{\sigma(2)} + 2) + 1 \right) N(a_3, \dots, a_\ell) \\ & - (k_{\sigma(2)} + 2)N(a_3, \dots, a_{\ell-1}) - k_{\frac{p-1}{p}} \end{aligned} \quad (7.4.12)$$

となる。ここで $t = \frac{p-1}{p}$ に系 7.4.9 を適用することにより $a_2 + 1 = 2 + k_{\sigma(2)}$ であることがわかる。そこで上記の第1項と第2項に (7.4.1) を適用することで

$$\begin{aligned} (K - 1)N(a_2 + 1, \dots, a_\ell) &= (K - 1)(2 + k_{\sigma(2)})N(a_3, \dots, a_\ell) + (K - 1)N(a_4, \dots, a_\ell), \\ N(a_2 + 1, \dots, a_{\ell-1}) &= (2 + k_{\sigma(2)})N(a_3, \dots, a_{\ell-1}) + N(a_4, \dots, a_{\ell-1}) \end{aligned}$$

が得られ、これを (7.4.12) に代入することで

$$E = (K - 1)N(a_4, \dots, a_\ell) + N(a_4, \dots, a_{\ell-1}) - N(a_3, \dots, a_\ell) - k_{\frac{p-1}{p}} \quad (7.4.13)$$

を得る。加えて $a_3 = K - 1$ であるから、第3項に (7.4.1) を適用することで

$$N(a_3, \dots, a_\ell) = (K - 1)N(a_4, \dots, a_\ell) + N(a_5, \dots, a_\ell)$$

を得るので、これをさらに (7.4.13) に代入することで

$$E = N(a_4, \dots, a_{\ell-1}) - N(a_5, \dots, a_\ell) - k_{\frac{p-1}{p}}$$

を得る。注 7.4.3 (5) で与えられる対称性を考慮すると、補題 7.4.10 (2) から $E = 0$ であることがわかる。よって (7.4.7) が示された。(7.4.8),(7.4.9) についても同様の変形を用いることで証明できる(これらは演習問題とする)。

最後に上記以外の $t \in (0, 1)$ の場合を示す。 $s(r) = (K - 1, a_1, \dots, a_\ell)$, $s(s) = (K - 1, b_1, \dots, b_m)$ であるとする、系 7.4.9 から

$$s(t) = (K - 1, 1, b_m - 1, b_{m-1}, \dots, b_1, K - 1, a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1)$$

とかける。

$$\mu := (b_m - 1, b_{m-1}, \dots, b_1, K - 1, a_\ell, \dots, a_3)$$

とおくと

$$F_{s(t)} = \begin{bmatrix} N(K - 1, 1, \mu, a_2 + 1) & N(K - 1, 1, \mu) \\ N(1, \mu, a_2 + 1) & N(1, \mu) \end{bmatrix}$$

となる。一方、 $C_t = C_r C_s - D_t$ であるから、 C_r, C_s に帰納法の仮定を利用したものを考え、 $F_{s(t)}$ と C_t の成分を比較する。これまでと同じ理由により (1, 1) 成分、(2, 1) 成分、(1, 2) 成分のみを比較すれば良い。したがって示すべきは

$$\begin{aligned} & N(K - 1, 1, \mu, a_2 + 1) \\ &= N(K - 1, a_1, \dots, a_\ell)N(K - 1, b_1, \dots, b_m) + N(K - 1, a_1, \dots, a_{\ell-1})N(b_1, \dots, b_m) - k_t \end{aligned} \quad (7.4.14)$$

$$N(1, \mu, a_2 + 1) = N(a_1, \dots, a_\ell)N(K - 1, b_1, \dots, b_m) + N(a_1, \dots, a_{\ell-1})N(b_1, \dots, b_m) \quad (7.4.15)$$

$$N(1, \mu) = N(a_1, \dots, a_\ell)N(b_1, \dots, b_m) + N(a_1, \dots, a_{\ell-1})N(b_1, \dots, b_{m-1}) - k_t \quad (7.4.16)$$

の 3 つの式である。(7.4.14) を示す。 $b_1 = 1$ であることを使って左辺に補題 7.4.11 を適用すると

$$\begin{aligned} N(K - 1, 1, \mu, a_2 + 1) &= N(K - 1, 1, b_m - 1, b_{m-1}, \dots, b_2 + 1)N(K, a_\ell, \dots, a_2 + 1) \\ &\quad - N(K - 1, 1, b_m - 1, b_{m-1}, \dots, b_3)N(a_\ell, \dots, a_2 + 1) \end{aligned} \quad (7.4.17)$$

となる。さらに K を含む数列を持つ項に (7.4.1)、 $K - 1$ を含む数列を持つ項に補題 7.4.11 を適用することで (7.4.17) は

$$\begin{aligned} & K^2 N(a_2 + 1, \dots, a_\ell)N(b_2 + 1, \dots, b_m) + KN(a_2 + 1, \dots, a_{\ell-1})N(b_2 + 1, \dots, b_m) \\ & - KN(a_2 + 1, \dots, a_\ell)N(b_2 + 1, \dots, b_{m-1}) - N(a_2 + 1, \dots, a_{\ell-1})N(b_2 + 1, \dots, b_{m-1}) \\ & - KN(a_2 + 1, \dots, a_\ell)N(b_3, \dots, b_m) + N(a_2 + 1, \dots, a_\ell)N(b_3, \dots, b_{m-1}). \end{aligned} \quad (7.4.18)$$

となる。一方で (7.4.14) の右辺に対して補題 7.4.11 を適用することで

$$\begin{aligned} & K^2 N(a_2 + 1, \dots, a_\ell)N(b_2 + 1, \dots, b_m) - KN(a_2 + 1, \dots, a_\ell)N(b_3, \dots, b_m) \\ & - KN(a_3, \dots, a_\ell)N(b_2 + 1, \dots, b_m) + N(a_3, \dots, a_\ell)N(b_3, \dots, b_m) \\ & + KN(a_2 + 1, \dots, a_{\ell-1})N(b_1, \dots, b_m) - N(a_3, \dots, a_{\ell-1})N(b_2 + 1, \dots, b_m) - k_t. \end{aligned} \quad (7.4.19)$$

である。主張を示すためには (7.4.18) と (7.4.19) の差が 0 であることを示せば良い。差を取ったものを E とおくと、

$$\begin{aligned} E &= -KN(a_2 + 1, \dots, a_\ell)N(b_2 + 1, \dots, b_{m-1}) - N(a_2 + 1, \dots, a_{\ell-1})N(b_2 + 1, \dots, b_{m-1}) \\ & \quad + N(a_2 + 1, \dots, a_\ell)N(b_3, \dots, b_{m-1}) + KN(a_3, \dots, a_\ell)N(b_2 + 1, \dots, b_m) \end{aligned}$$

$$-N(a_3, \dots, a_\ell)N(b_3, \dots, b_m) + N(a_3, \dots, a_{\ell-1})N(b_2 + 1, \dots, b_m) + k_t. \quad (7.4.20)$$

ここで、補題 7.4.10 (1) から

$$N(K - 1, b_1, \dots, b_j) = K N(b_2 + 1, \dots, b_j) - N(b_3, \dots, b_j)$$

である。これを $j = m - 1, m$ に適用することにより (7.4.20) は

$$\begin{aligned} E = & -N(a_2 + 1, \dots, a_\ell)N(K - 1, b_1, \dots, b_{m-1}) - N(a_2 + 1, \dots, a_{\ell-1})N(b_1, \dots, b_{m-1}) \\ & + N(a_3, \dots, a_\ell)N(K - 1, b_1, \dots, b_m) + N(a_3, \dots, a_{\ell-1})N(b_1, \dots, b_m) + k_t \end{aligned} \quad (7.4.21)$$

と書き直せる。ここでさらに補題 7.4.12 から

$$\begin{aligned} & N(a_3, \dots, a_\ell)N(K - 1, b_1, \dots, b_m) + N(a_3, \dots, a_{\ell-1})N(b_1, \dots, b_m) \\ & = N(a_3, \dots, a_\ell, K - 1, b_1, \dots, b_m), \\ & N(a_2 + 1, \dots, a_\ell)N(K - 1, b_1, \dots, b_{m-1}) + N(a_2 + 1, \dots, a_{\ell-1})N(b_1, \dots, b_{m-1}) \\ & = N(a_2 + 1, \dots, a_\ell, K - 1, b_1, \dots, b_{m-1}) \end{aligned}$$

が従う。したがって

$$E = N(a_3, \dots, a_\ell, K - 1, b_1, \dots, b_m) - N(a_2 + 1, \dots, a_\ell, K - 1, b_1, \dots, b_{m-1}) + k_t. \quad (7.4.22)$$

さらに命題 6.1.9 により数列を逆順にして

$$E = N(b_m, \dots, b_1, K - 1, a_\ell, \dots, a_3) - N(b_{m-1}, \dots, b_1, K - 1, a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1) + k_t. \quad (7.4.23)$$

最後に、補題 7.4.10 (2) から

$$N(b_m, \dots, b_1, K - 1, a_\ell, \dots, a_3) = N(b_{m-1}, \dots, b_1, K - 1, a_\ell, \dots, a_3, a_2 + 1) - k_t$$

を得るので $E = 0$ となって主張が従う。

(7.4.15), (7.4.16) についても同様の変形を用いることで証明できる (これらは演習問題とする)。

次に $t \in (1, \infty]$ の場合について証明を行う。 $C_{\frac{1}{t}}$ については直接計算で確認せよ。以下 $t \in (1, \infty)$ とする。まず系 5.3.7 と命題 5.4.4 から $m_{\frac{1}{t}}^* = m_t, u_{\frac{1}{t}}^* = m_t - u_t - k_t$ である。これと定理 7.2.1 から

$$C_t = \begin{bmatrix} (K - 1)m_{\frac{1}{t}}^* + u_{\frac{1}{t}}^* & * \\ m_{\frac{1}{t}}^* & m_{\frac{1}{t}}^* - u_{\frac{1}{t}}^* - k_t \end{bmatrix}$$

であることがわかる ((1, 2) 成分は $\det C_t = 1$ から決定される)。 $\frac{1}{t} \in (0, 1)$ なので $s^*(\frac{1}{t}) = (b_0, \dots, b_m)$ とすると前半の主張が使える

$$C_t = \begin{bmatrix} (K - 1)N(b_1, \dots, b_m) + N(b_1, \dots, b_{m-1}) & * \\ N(b_1, \dots, b_m) & N(b_1, \dots, b_m) - N(b_1, \dots, b_{m-1}) - k_t \end{bmatrix}$$

を得る。一方で、注 7.4.3 (7) から $s(t) = (b_0, b_m, \dots, b_1)$ と書けるので

$$F_{s(t)} = \begin{bmatrix} N(b_0, b_m, \dots, b_1) & * \\ N(b_m, \dots, b_1) & N(b_m, \dots, b_2) \end{bmatrix}$$

となる。ここで、 $C_{\frac{1}{t}}^*$ を $\frac{1}{t}$ に付随する $(k_1, k_2, k_3, \sigma^*)$ -GC 行列とすると、

$$\text{tr}(C_t) = \text{tr}(C_{\frac{1}{t}}^*) = Km_t - k_t$$

であることがわかり、さらに $b_0 = K - 1, b_1 = 1$ に注意して補題 7.4.10 (1) と (7.4.1) を使うことで

$$\begin{aligned}
& \operatorname{tr}(F_{s^*(\frac{1}{t})}) \\
&= N(b_0, b_1, \dots, b_m) + N(b_1, \dots, b_{m-1}) \\
&= KN(b_2 + 1, \dots, b_m) - N(b_3, \dots, b_m) + N(b_1, \dots, b_{m-1}) \\
&= (K - 1)N(b_2 + 1, \dots, b_m) + N(b_2 + 1, \dots, b_m) - N(b_3, \dots, b_m) + N(b_1, \dots, b_{m-1}) \\
&= N(b_0, b_m, \dots, b_1) + N(b_2 + 1, \dots, b_m) - N(b_3, \dots, b_m) \\
&= N(b_0, b_m, \dots, b_1) + N(1, b_2, \dots, b_m) - N(b_3, \dots, b_m) \\
&= N(b_0, b_m, \dots, b_1) + N(b_2, \dots, b_m) \\
&= \operatorname{tr}(F_{s(t)})
\end{aligned}$$

であるから、前半の結果 $\operatorname{tr}(F_{s^*(\frac{1}{t})}) = \operatorname{tr}(C_{\frac{1}{t}}^*)$ と合わせて $\operatorname{tr}(F_{s(t)}) = \operatorname{tr}(C_t)$ であることもわかる。したがって $C_t = F_{s(t)}$ を示すためには (1, 1) 成分と (2, 1) 成分の一致を確かめれば良い。このうち (2, 1) 成分は命題 6.1.9 (1) から一致し、(1, 1) 成分は命題 6.1.9 (1) で C_t の方の数列を反転させた後で (7.4.1) を適用することで一致することがわかる。以上から示された。□

注 7.4.13. $C_{\frac{0}{1}}$ と $F_{s(\frac{0}{1})}$ は一致しない。実際、 $C_{\frac{0}{1}}$ には負の成分が存在する。

第 8 章

一般化離散マルコフスペクトラム

第 7 章までに、一般化マルコフ数、特性数、一般化マルコフ距離、一般化コーン行列、一般化強許容数列といった道具を整備してきた。本章ではそれらを用いて、一般化マルコフ数の理論をラグランジュスペクトラムおよびマルコフスペクトラムの理論へと再接続する。すなわち、本章の目的は、一般化マルコフ数から自然に得られる離散的な値の族を定義し、それらが実際にラグランジュ定数やマルコフ定数として実現されることを示すことである。ここにおいて、第 II 部で構成してきた数論的・組合せ論的・幾何学的・行列論的データは、最終的にスペクトラムの言葉の中で一つに結びつく。

本章では、まず一般化マルコフ数から定まる値の集合として一般化離散マルコフスペクトラムを定義し、本稿全体の主定理を述べる。ついで、その各元が実際に 2 次無理数のラグランジュ定数として、また有理数係数 2 次形式のマルコフ定数として実現されることを示す。これにより、一般化マルコフ数の理論が単なる古典理論の形式的拡張ではなく、ラグランジュ/マルコフスペクトラムの中に具体的な値を与える理論として機能していることが明らかになる。さらに $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$ の場合にこの一般理論を古典的マルコフの定理へ特殊化し、古典定理が本稿の枠組みの中に自然に位置づけられることを示す。その後、有理数傾きで得られる一般化強許容列を無理数傾きへ近づけることで、無理数傾きの直線から得られる両側無限列によるマルコフ定数が境界値 $3 + k_1 + k_2 + k_3$ となることを証明する。加えて、 $(0, 0, 0)$ 型と $(2, 2, 2)$ 型の間に現れる対応を論じ、最後にフロベニウスの一意性予想の自然な一般化について考察する。

本章のうち、一般化離散マルコフスペクトラムの定義と主定理は基本的に [Gyo25] に基づいている。マルコフの定理の証明については基本方針は従来のテキスト [Bom07, Aig13, Reu19] に沿っているが、強許容列との関係を見るために右/左メカニカル語を導入する本稿独自の証明を採用した。

8.1 定義と主定理

$(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に対して、

$$\mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3, \sigma} := \left\{ \frac{\sqrt{((3 + k_1 + k_2 + k_3)m_t - k_t)^2 - 4}}{m_t} \mid t \in [0, \infty] \cap \mathbb{Q}, m_t : (k_1, k_2, k_3, \sigma)\text{-GM 数} \right\}$$

$$\mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3} := \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3, \sigma}$$

と定める。 $\mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3}$ を (k_1, k_2, k_3) 一般化離散マルコフスペクトラムという。本節（そして本稿全体）の主定理は次である：

定理 8.1.1. $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ を固定する。ここでは $1/0 = \infty$ および $1/\infty = 0$ と約束する。任意の既約分数 $t \in [0, \infty]$ に対して、対応する (k_1, k_2, k_3, σ) -GM 数と位置の組を (m_t, i_t) とし、対応する一般化強許容列を $s(t)$ とする。有限正整数列 S に対して $\alpha_S := [\overline{S}]$ と書くことにすると、

$$\mathcal{L}(\alpha_{s(t)}) = \mathcal{L}(\alpha_{s^*(\frac{1}{t})}) = \frac{\sqrt{((3+k_1+k_2+k_3)m_t - k_t)^2 - 4}}{m_t}$$

が成り立つ。とくに $\mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3} \subset \mathcal{L}$ である。

上記の定理を認めると、定理 4.4.2 から次の定理も直ちに従う。

定理 8.1.2. 有限正整数列 S に対して、 $Q_S = (x - \alpha_S y)(x - \alpha'_S y)$ とする。ただし α'_S は α_S の 2 次共役であるとする。このとき、

$$\mathcal{M}(Q_{s(t)}) = \mathcal{M}(Q_{s^*(\frac{1}{t})}) = \frac{\sqrt{((3+k_1+k_2+k_3)m_t - k_t)^2 - 4}}{m_t}$$

が成り立つ。

本稿のこれまでの内容から、定理 8.1.1 は次のように証明される。

定理 8.1.1 の証明. $\mathcal{L}(\alpha_{s(t)}) = \mathcal{L}(\alpha_{s^*(\frac{1}{t})})$ であることは、定理 3.3.3 と S の反転不変性から、 $\overline{s(t)}$ の循環節と $\overline{s^*(\frac{1}{t})}$ の循環節が反転と循環シフトを除いて一致すれば良い。これは注 7.4.3 (7) から直ちに従う。次に $\mathcal{L}(\alpha_{s(t)}) = \frac{\sqrt{((3+k_1+k_2+k_3)m_t - k_t)^2 - 4}}{m_t}$ であることを示す。なお、 $t = 0$ の場合は、 $s(0)$ 、 $F_{s(0)}$ および m_0 を定義から直接計算することで主張が従う。したがって以下では $t \in (0, \infty]$ として示す。定理 3.3.5 から、

$$\mathcal{L}(\alpha_{s(t)}) = \max \left\{ \frac{\sqrt{(\text{tr}(F_{S_i}))^2 - (-1)^{n+1} \cdot 4}}{(F_{S_i})_{21}} \mid 0 \leq i \leq n \right\}$$

が成り立つ (ただし、 $s(t) = (a_0, \dots, a_n)$ に対して $S_i := (a_i, \dots, a_n, a_0, \dots, a_{i-1})$ とした)。注 7.4.3 (0) から $(-1)^{n+1} = 1$ であることに注意せよ。ここで、 $i = 0$ とすると $F_{S_0} = F_{s(t)}$ だが、定理 7.4.4 よりこれは C_t に一致する。さらに、 $\text{tr}(C_t) = (3+k_1+k_2+k_3)m_t - k_t$ であることが定理 7.2.1 からわかる。さらに定理 7.2.1 から $(F_{S_0})_{21} = (C_t)_{21} = m_t$ であることもわかるので、あとは

$$\min\{(F_{S_i})_{21} \mid 0 \leq i \leq n\} = (F_{S_0})_{21}$$

であることがわかれば良い。したがって主張を示すためには $(F_{S_0})_{21} = N(a_1, \dots, a_n)$ が

$$N_t = \{N(w) \mid \text{ある } 0 \leq k \leq n \text{ が存在して } w = (a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+n})\}$$

における最小元であることを示せば十分である。 $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ を一点穿孔トーラスの三角形分割へ射影すると、 \overline{L}_t はトーラス上のループに対応する (注 7.4.1 も参照)。 \overline{L}_t をこのトーラス上のループとみなすとき、各 $w = (a_{k+1}, \dots, a_{k+n})$ に対して、三角形横断規則および辺横断規則により符号列 w を与える \overline{L}_t の部分を $\overline{L}_t(w)$ と書く。

表 8.1 に従って $\overline{L}_t(w)$ の端点を修正すると、三角形横断規則・辺横断規則・端点規則により符号列が w となるような弧 $\widetilde{L}_t(w)$ を得る。

$\overline{L}_t(w)$ の端点	$\widetilde{L}_t(w)$ への修正	$\overline{L}_t(w)$ の端点	$\widetilde{L}_t(w)$ への修正

表 8.1 端点の修正

ここで、 $\overline{L}_t(w)$ の 2 つの端点は、端点の修正によって一点穿孔トーラス上のホモトピーの意味で遠回りすることなく接続されていることに注意する (図 8.1 参照)。この事実は端点修正のすべてのパターンを場合分けすれば確認できる。

したがって $t = \frac{p}{q}$ のとき $\widetilde{L}_t(w)$ は $(0, 0)$ から (q, p) への曲線片として表すことができる。さらにこれらの $\widetilde{L}_t(w)$ は常に一般弧である。さて、 $\widetilde{L}_t(a_1, \dots, a_n)$ は、端点 $A = (0, 0)$ 、 $B = (q, p)$ をもつ線分 L_t (したがって γ_{AB}^L) に対応していることがわかる。このとき、定理 6.3.7 より $N(a_1, \dots, a_n)$ は N_t において最小値をとることがわかり証明が完了する。□

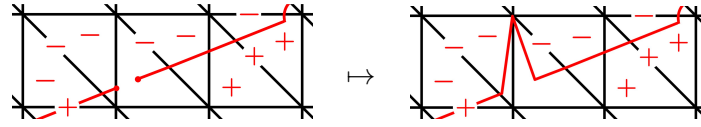


図 8.1 $\overline{L}_t(w)$ から $\widetilde{L}_t(w)$ への修正の例

この証明のポイントは、ラグランジュ定数の値の候補を

$$\mathcal{L}(\alpha_{s(t)}) = \max \left\{ \frac{\sqrt{(\text{tr}(F_{S_i}))^2 - (-1)^{n+1} \cdot 4}}{(F_{S_i})_{21}} \mid 0 \leq i \leq n \right\}$$

まで絞った後、最も小さい $(F_{S_i})_{21}$ を与える S_i がどれで、さらにそのときの $(F_{S_i})_{21}$ の値がいくつなのかを決める手法にある。例えば [Bom07] ではこの部分をアドホックな大小評価で与えているが、本稿ではここに GM 距離の最小性とそのときの GM 距離の値が GM 数になることを使っている。前者の手法は考えている GM 数がマルコフ数の場合にしか使えないが、このやり方であれば一般の GM 数に対して統一的に取り扱うことができるのである。

例 8.1.3. $(k_1, k_2, k_3, \sigma) = (1, 2, 0, \text{id})$, $t = \frac{2}{5}$ とおく。 $i_{\frac{2}{5}} = 1$ なので

$$s\left(\frac{2}{5}\right) = (5, 1, 3, 3, 1, 5, 4, 1, 3, 4).$$

したがって $N(w) \in N_{\frac{2}{5}}$ を与える数列 w は

$$(1, 3, 3, 1, 5, 4, 1, 3, 4), (3, 3, 1, 5, 4, 1, 3, 4, 5), (3, 1, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 1), (1, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 1, 3),$$

$$(5, 4, 1, 3, 4, 5, 1, 3, 3), (4, 1, 3, 4, 5, 1, 3, 3, 1), (1, 3, 4, 5, 1, 3, 3, 1, 5), (3, 4, 5, 1, 3, 3, 1, 5, 4),$$

$$(4, 5, 1, 3, 3, 1, 5, 4, 1), (5, 1, 3, 3, 1, 5, 4, 1, 3)$$

で与えられる。対応する $N(w)$ の値はそれぞれ

$$8227, 32957, 12039, 12041, 32937, 8261, 9997, 31881, 12199, 11127,$$

であり、 $N_{\frac{2}{5}}$ の最小値は 8227 である。対応する弧 $\overline{L}_t(w), \widetilde{L}_t(w)$ は表 8.2 の通り。

$$F_{s(\frac{2}{5})} = \begin{bmatrix} N(5, 1, 3, 3, 1, 5, 4, 1, 3, 4) & N(5, 1, 3, 3, 1, 5, 4, 1, 3) \\ N(1, 3, 3, 1, 5, 4, 1, 3, 4) & N(1, 3, 3, 1, 5, 4, 1, 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47431 & 11127 \\ 8227 & 1930 \end{bmatrix}$$

であるから、 $\alpha_{s(\frac{2}{5})} = \frac{\sqrt{2436508317} + 45501}{16454}$,

$$Q_{s(\frac{2}{5})} = x^2 - \frac{45501}{8227}xy - \frac{11127}{8227}y^2$$

に対して

$$\mathcal{L} \left(\frac{\sqrt{2436508317} + 45501}{16454} \right) = \mathcal{M} \left(x^2 - \frac{45501}{8227}xy - \frac{11127}{8227}y^2 \right) = \frac{\sqrt{2436508317}}{8227}$$

が成り立つ。

例 8.1.4. いくつかの 2 次無理数 α と 8.1.1 から得られる対応する値 $\mathcal{L}(\alpha)$ を列挙する。表 8.3 は $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$ の場合を示し ($k_1 = k_2 = k_3$ の場合は $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に依存せず値が決まることに注意)、表 8.4, 8.5, 8.6 は $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 1)$ の場合を示す。表 8.7, 8.8, 8.9 は $(k_1, k_2, k_3) = (0, 1, 1)$ の場合を示す。表 8.10 は $(k_1, k_2, k_3) = (1, 1, 1)$ の場合を示し、表 8.11 は $(k_1, k_2, k_3) = (2, 2, 2)$ の場合を示す。さらに、表 8.12 は $(k_1, k_2, k_3, \sigma) = (1, 2, 0, \text{id})$ の場合を示す。各リストにおいて、元は対応する GM 数の昇順に並べられている。

8.2 メカニカル語

この節では、次の節で与えられるマルコフの定理の証明のために必要なメカニカル語を導入する。ここでは、強許容列との関係を見るために、通常よく用いられる傾きが 1 以下の語ではなく、傾きが 1 以上の語として定義する。

定義 8.2.1. $t \in [1, \infty]$ 、 $\theta \in \mathbb{R}$ とする。まず $1 \leq t < \infty$ とする。平面内の直線 $l_{t,\theta} : y = tx + \theta$ を、 x 座標と y 座標がともに増加する向き、すなわち左下から右上へ進む向きに向きつける。各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 $l_{t,\theta}$ と水平線 $y = n$ の交点を $P_n = (\frac{n-\theta}{t}, n)$ とおく。 P_n の右側にある最も近い格子点の x 座標を $r_n = \lceil \frac{n-\theta}{t} \rceil$ とし、 P_n の左側にある最も近い格子点の x 座標を $l_n = \lfloor \frac{n-\theta}{t} \rfloor$ とする。ただし、 P_n 自身が格子点である場合には、その格子点は右側にも左側にも属するものとする。このとき

$$\varepsilon_n^R = r_{n+1} - r_n, \quad \varepsilon_n^L = l_{n+1} - l_n$$

とおく。 $t \geq 1$ であるから、いずれも $\varepsilon_n^R, \varepsilon_n^L \in \{0, 1\}$ である。

任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$b_n^R = \begin{cases} X & \text{if } \varepsilon_n^R = 1, \\ Y & \text{if } \varepsilon_n^R = 0 \end{cases}$$

で定まる両側無限語 $\mathbf{b}^R = (b_n^R)_{n \in \mathbb{Z}}$ を、傾き t 、切片 θ の**右メカニカル語**という。

同様に、

$$b_n^L = \begin{cases} X & \text{if } \varepsilon_n^L = 1, \\ Y & \text{if } \varepsilon_n^L = 0 \end{cases}$$

で定まる両側無限語 $\mathbf{b}^L = (b_n^L)_{n \in \mathbb{Z}}$ を、傾き t 、切片 θ の**左メカニカル語**という。右メカニカル語と左メカニカル語をまとめて**メカニカル語**という。

最後に、 $t = \infty$ の場合には

$$\dots YYY \dots$$

を傾き ∞ のメカニカル語と定める。

例 8.2.2. $l_{\frac{5}{2}, \frac{1}{4}} : y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{4}$ に対する右メカニカル語は、 $XYXY$ を循環節とする両側純循環無限語である。一方で左メカニカル語も全く同じ語を与える。図 8.2 左を参照せよ。この例では左と右のメカニカル語が同じであるが、直線が格子点を通る場合は状況が変わる。 $l_{\frac{5}{2}, 0} : y = \frac{5}{2}x$ に対する右メカニカル語は同じく $XYXY$ を循環節とする両側純循環無限語である一方、左メカニカル語は $YYXY$ を循環節とする両側純循環無限語である。図 8.2 中央を参照せよ。2 つの語は始点をシフトすれば同じ語ではあるものの、このような差が生まれる。さらに傾きが無理数で格子点を通ると、

左メカニカル語と右メカニカル語は唯一通る格子点周りの文字で差が出るのがわかる。図 8.2 右を参照せよ。

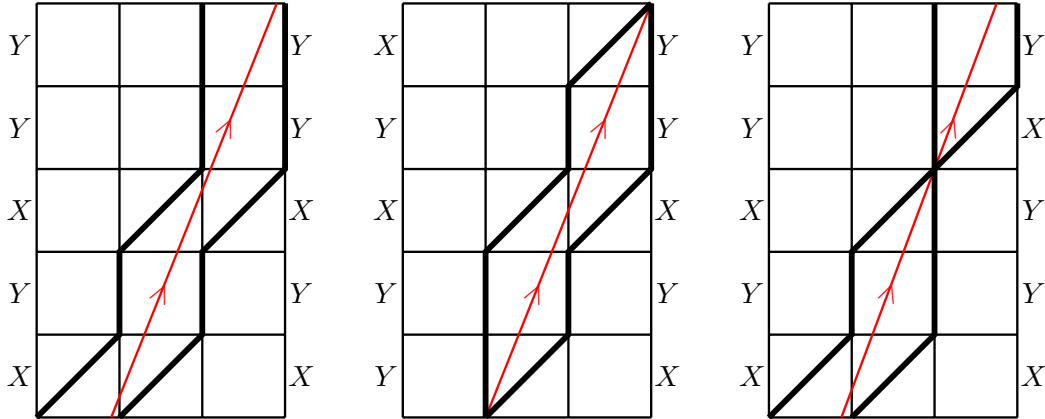


図 8.2 メカニカル語の一部（下から上に読む）

以下基本的な性質を示す。

補題 8.2.3. $t = \frac{p}{q} \in [1, \infty)$ を既約分数とする。このとき傾き t のメカニカル語は周期 p を持ち、その 1 周期中に現れる X の個数は q である。したがって、1 周期を w と書くと

$$\frac{|w|}{|w|_X} = \frac{p}{q} = t$$

が成り立つ。

証明. 右メカニカル語の場合を示せば十分である。

$$r_n = \left\lceil \frac{n - \theta}{t} \right\rceil = \left\lceil \frac{q(n - \theta)}{p} \right\rceil$$

である。 $t = \frac{p}{q}$ より

$$r_{n+p} = \left\lceil \frac{q(n + p - \theta)}{p} \right\rceil = \left\lceil \frac{q(n - \theta)}{p} + q \right\rceil = r_n + q$$

である。したがって

$$\varepsilon_{n+p}^R = r_{n+p+1} - r_{n+p} = r_{n+1} - r_n = \varepsilon_n^R$$

となり、周期は p である。また、1 周期中の X の個数は

$$\sum_{n=0}^{p-1} \varepsilon_n^R = r_p - r_0 = q$$

である。よって

$$\frac{|w|}{|w|_X} = \frac{p}{q} = t$$

を得る。左メカニカル語の場合も床関数を用いて同様に示される。 □

次にメカニカル語の添字をずらすシフト操作とメカニカル語の切片の関係について述べる。

補題 8.2.4. $k \in \mathbb{Z}$ とする。語のシフトを

$$(T^k \mathbf{b})_n = b_{n+k}$$

で定める。このとき、任意の $t \in [1, \infty]$ と切片 θ に対して

$$T^k \mathbf{b}^R(t, \theta) = \mathbf{b}^R(t, \theta - k), \quad T^k \mathbf{b}^L(t, \theta) = \mathbf{b}^L(t, \theta - k)$$

が成り立つ。特に、メカニカル語をシフトしても、同じ傾きのメカニカル語である。

証明. $t = \infty$ の場合は $\dots YYY \dots$ なので明らかである。以下、 $1 \leq t < \infty$ とする。

右メカニカル語の場合、

$$r_n(\theta) = \left\lfloor \frac{n - \theta}{t} \right\rfloor$$

とおく。すると

$$r_n(\theta - k) = \left\lfloor \frac{n - (\theta - k)}{t} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n + k - \theta}{t} \right\rfloor = r_{n+k}(\theta)$$

である。したがって

$$r_{n+1}(\theta - k) - r_n(\theta - k) = r_{n+k+1}(\theta) - r_{n+k}(\theta)$$

であり、

$$T^k \mathbf{b}^R(t, \theta) = \mathbf{b}^R(t, \theta - k)$$

が従う。

左メカニカル語の場合も

$$l_n(\theta) = \left\lfloor \frac{n - \theta}{t} \right\rfloor$$

を用いれば同様である。 □

一般に、逆は成り立たない。すなわち、切片が異なるメカニカル語がシフトで移り合うとは限らない（上の証明では k は整数しか取れないことからすぐわかる）。ただし、傾きが有理数であれば逆も成立する。これを考えよう。議論を簡単にするために、まず左メカニカル語を右メカニカル語に取り直せることを示す。

補題 8.2.5. $t \in [1, \infty]$ が有理傾きであるとする。このとき、傾き t の任意のメカニカル語は、同じ傾き t の右メカニカル語として表せる。

証明. 右メカニカル語については何も示すことはない。したがって、傾き t の左メカニカル語 $\mathbf{b} = \mathbf{b}^L(t, \theta)$ を考える。

まず $t = \infty$ の場合は、 $\mathbf{b} = \dots YYY \dots$ であり、これは右メカニカル語でもある。以下、 $1 \leq t < \infty$ とする。 $t = \frac{p}{q}$ と既約分数表示する。ただし $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ 、 $p \geq q$ とする。左メカニカル語は

$$l_n = \left\lfloor \frac{n - \theta}{t} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q(n - \theta)}{p} \right\rfloor$$

の差 $l_{n+1} - l_n$ によって定まる。ここで $x_n := \frac{n - \theta}{t}$ とおく。 $t = \frac{p}{q}$ なので

$$x_{n+p} = x_n + q$$

である。したがって、小数部分 $\{x_n\}$ は n について周期 p を持つ。特に、集合

$$\{\{x_n\} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

は有限集合である。この有限集合に対して、十分小さい $\delta > 0$ を取る。具体的には、 $\{x_n\} \neq 0$ となる n について

$$\{x_n\} + \delta < 1$$

がすべて成り立つように取ればよい。そのような δ は、小数部分の集合が有限であるため存在する。例えば

$$0 < \delta < \min\{1 - \{x_n\} \mid n = 0, \dots, p-1, \{x_n\} \neq 0\}$$

と取ればよい。ただし右辺の集合が空の場合は、任意の $0 < \delta < 1$ を取る。このとき、任意の $n \in \mathbb{Z}$ について

$$\lceil x_n + \delta \rceil = \lfloor x_n \rfloor + 1$$

が成り立つ。実際、 x_n が整数ならば $\lceil x_n + \delta \rceil = x_n + 1 = \lfloor x_n \rfloor + 1$ であり、 x_n が整数でなければ、 $\{x_n\} + \delta < 1$ より $\lceil x_n + \delta \rceil = \lfloor x_n \rfloor + 1$ である。いま $\theta' = \theta - t\delta$ とおく。すると

$$\frac{n - \theta'}{t} = \frac{n - \theta}{t} + \delta = x_n + \delta$$

である。したがって、右メカニカル語 $\mathbf{b}^R(t, \theta')$ を定める列

$$r_n = \left\lceil \frac{n - \theta'}{t} \right\rceil$$

について $r_n = l_n + 1$ がすべての n で成り立つ。ゆえに差を取ると

$$r_{n+1} - r_n = l_{n+1} - l_n$$

である。したがって、 $\mathbf{b}^L(t, \theta)$ と $\mathbf{b}^R(t, \theta')$ は各位置で同じ文字を与える。すなわち $\mathbf{b}^L(t, \theta) = \mathbf{b}^R(t, \theta')$ である。よって有理傾きの左メカニカル語は、同じ傾きの右メカニカル語として表せる。□

これを用いて次を示す。

補題 8.2.6. $t \in [1, \infty]$ が有理数であるとする。このとき、傾き t のメカニカル語はシフトによる差を除いて一意に定まる。

証明. $t = \infty$ の場合は $\dots YYY \dots$ のみであり、明らかである。以下、 $t = \frac{p}{q}$ と既約分数表示する。ただし $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ 、 $p \geq q$ とする。直前の補題により、有理傾きのメカニカル語は右メカニカル語として取れる。そこで右メカニカル語だけを考える。 $\mathbf{b}^R(t, \theta)$ は $r_n = \lceil \frac{n-\theta}{t} \rceil$ の差 $r_{n+1} - r_n$ によって定まる。 $\alpha = \frac{q}{p}$ 、 $\beta = -\frac{q\theta}{p}$ とおくと、 $r_n = \lceil n\alpha + \beta \rceil$ であり、

$$b_n = X \iff \lceil (n+1)\alpha + \beta \rceil - \lceil n\alpha + \beta \rceil = 1.$$

右辺は β を 1 だけ変えても変わらないので、 β は \mathbb{R}/\mathbb{Z} 上の点と見ればよい。ここで

$$u_\beta(n) = \lceil (n+1)\alpha + \beta \rceil - \lceil n\alpha + \beta \rceil$$

と書く。すると

$$u_{\beta+\alpha}(n) = \lceil (n+2)\alpha + \beta \rceil - \lceil (n+1)\alpha + \beta \rceil = u_{\beta}(n+1)$$

である。したがって、 β を α だけ動かすことは、語を1つシフトすることに対応する。

一方、 $\alpha = \frac{q}{p}$ であり $\gcd(p, q) = 1$ なので、 \mathbb{R}/\mathbb{Z} 上の点

$$0, \alpha, 2\alpha, \dots, (p-1)\alpha$$

は、 p 個の点

$$0, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{p-1}{p}$$

を並べ替えたものである。右メカニカル語は、 β がこれらの点で区切られる各半開区間上で一定である。さらに、 $\beta \mapsto \beta + \alpha$ はこれらの半開区間を巡回的に入れ替える。したがって、切片を変えて得られる語は、すべて互いにシフトで一致する。よって有理傾きの場合、切片はメカニカル語をシフトの範囲でしか変えないことが示された。□

命題 8.2.7. $t, t' \in [1, \infty) \cap \mathbb{Q}$ とし、 $t \neq t'$ とする。 \mathbf{b} を傾き t のメカニカル語、 \mathbf{b}' を傾き t' のメカニカル語とする。このとき \mathbf{b} と \mathbf{b}' はシフト同値ではなく、互いに反転の関係にもない。

証明. 周期語 \mathbf{c} に対して、1 周期中に現れる X の割合を $D_X(\mathbf{c})$ と書く。これは周期の取り方によらず定まる。また、 D_X はシフトおよび反転によって変わらない。

$t = \infty$ のメカニカル語は $\dots YYY \dots$ であるから、この場合は $D_X(\mathbf{b}) = 0$ である。一方、 $t = \frac{p}{q} \in [1, \infty) \cap \mathbb{Q}$ を既約分数で表すと、補題 8.2.3 より $D_X(\mathbf{b}) = \frac{q}{p} = \frac{1}{t}$ である。したがって、一般に $D_X(\mathbf{b}) = \frac{1}{t}$ が成り立つ。ただし $t = \infty$ のときは $\frac{1}{t} = 0$ と読む。

もし \mathbf{b} と \mathbf{b}' がシフト同値であれば、 $D_X(\mathbf{b}) = D_X(\mathbf{b}')$ である。よって $\frac{1}{t} = \frac{1}{t'}$ となり、 $t = t'$ となるが、これは仮定に矛盾する。したがって \mathbf{b} と \mathbf{b}' はシフト同値ではない。

同様に、もし \mathbf{b} と \mathbf{b}' が互いに反転の関係にあるならば、すなわちある $k \in \mathbb{Z}$ について $\mathbf{b} = T^k((\mathbf{b}')^*)$ となるならば、反転とシフトは D_X を変えないので、やはり $D_X(\mathbf{b}) = D_X(\mathbf{b}')$ である。したがって $t = t'$ となり、仮定に矛盾する。よって \mathbf{b} と \mathbf{b}' は互いに反転の関係にもない。□

この節の最後に、有理数傾きのメカニカル語と $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$ の場合の強許容数列との関係性を与えておく。これがマルコフの定理の証明についての重要な鍵となる。

命題 8.2.8. 有理数の傾き t ($\frac{1}{0}$ を含む) を持つメカニカル語を \mathbf{w} とする。このとき、 $X \mapsto 2, 2$, $Y \mapsto 1, 1$ で変換した数列を $\hat{\mathbf{w}}$ とすると、これは $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$ のときの (一般化) 強許容数列 $s(t)$ を用いて

$$\hat{\mathbf{w}} = (\dots, s(t), s(t), s(t), \dots)$$

とかける。

証明. $t = \frac{1}{0}$ のときは直接確認することでわかる。以下 $1 \leq t < \infty$ とする。補題 8.2.5 より、有理数傾きの任意のメカニカル語は同じ傾きの右メカニカル語として表せるので、 \mathbf{w} を右メカニカル語としてよい。右メカニカル語と $s(t)$ の関係を観察しよう。右メカニカル語 \mathbf{w} は有理数傾き t をもつので、この語を与える直線として $\overline{L_t}$ を上下に無限に伸ばしたものを取ってよい。 $\overline{L_t}$ について右メカニカル語のルールを使って有限語を与えると、 X を与える区間では、 $\overline{L_t}$ は $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ の三角形を x 方向に4つ通

過していることがわかる。このとき符号規則により三角形に割り当てられる符号列は $-,-,+,+$ である。一方で Y を与える区間では、 \overline{L}_t は $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ の三角形を y 方向に 2 つ通過していることがわかる。このとき符号規則により三角形に割り当てられる符号列は $-,+$ である (図 8.3)。したがって、 \mathbf{w} の中の \overline{L}_t に対応する循環節において、 X に対して 2, 2, Y に対して 1, 1 を割り当てたものが \overline{L}_t を通る三角形に対する符号規則であり、したがって $s(t)$ の定義から主張が成り立つことがわかる。□

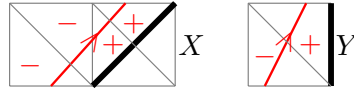


図 8.3 符号規則と右メカニカル語の関係

8.3 マルコフの定理

この節では $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$ の場合を考える。このとき $\text{MT}(0, 0, 0, \sigma)$ の各頂点における第 $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$ 成分は $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に依存しないので、GM 数の分数ラベリングはどの σ を選んでも同じである。したがってこれ以降 σ を省略する。定理 8.1.1 を $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$ に適用することで $\mathcal{M}_{0,0,0} \subset \mathcal{L} \cap (0, 3) \subset \mathcal{M} \cap (0, 3)$ となることがわかるが、実は逆の包含も成り立つことが知られており、**マルコフの定理**と呼ばれる。本節ではこれを証明していく。

定理 8.3.1 (マルコフの定理). $\mathcal{M}_{0,0,0} = \mathcal{L} \cap (0, 3) = \mathcal{M} \cap (0, 3)$ が成り立つ。

$\mathcal{M}_{0,0,0} = \mathcal{M} \cap (0, 3)$ が成り立てばマルコフの定理は示されるので、示すべきは $\mathcal{M}_{0,0,0} \supset \mathcal{M} \cap (0, 3)$ である。そのためには $\mathcal{M}(Q) = S(\mathbf{b}) \in (0, 3)$ を与える両側正整数無限数列 \mathbf{b} (このような \mathbf{b} の存在は系 4.3.4 から与えられる) の形を特定すればよい。 $S(\mathbf{b}) > 0$ は任意の両側正整数無限数列 \mathbf{b} で成り立つので、 $S(\mathbf{b}) \leq 3$ となる条件を考えよう。ただし、まずは少し広く $S(\mathbf{b}) \leq 3$ となるケースを考える。 $S(\mathbf{b})$ の定義

$$S(\mathbf{b}) := \sup_{h \in \mathbb{Z}} \ell_h(\mathbf{b}) = \sup_{h \in \mathbb{Z}} ([b_h; b_{h+1}, \dots] + [0; b_{h-1}, b_{h-2}, \dots])$$

から、明らかに次のことが成り立つ。

命題 8.3.2. $S(\mathbf{b}) \leq 3$ ならば任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $b_i = 1$ または $b_i = 2$ である。

以下、各 b_i は 1 または 2 という前提の元で話を進める。 $\ell_h(\mathbf{b})$ の計算について、 h の値を明示しない計算記号

$$\ell(\dots, b_{h-2}, b_{h-1} \mid b_h, b_{h+1}, \dots) := [b_h; b_{h+1}, \dots] + [0; b_{h-1}, b_{h-2}, \dots]$$

を導入しておく。

補題 8.3.3. u, v を右片側無限列とする。 $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $\ell(u^* \mid c, v) = \ell(v^* \mid c, u)$ が成立する。ただし u^* は u の反転整数列である。とくに $S(\mathbf{b}) \leq 3$ であることと $S(\mathbf{b}^*) \leq 3$ は同値である。

証明. 次の式変形から直ちに従う：

$$\ell(u^* \mid c, v) = [c; v] + [0; u] = \left(c + \frac{1}{[u]}\right) + \frac{1}{[v]} = \left(c + \frac{1}{[v]}\right) + \frac{1}{[u]} = [c; u] + [0; v] = \ell(v^* \mid c, u).$$

□

さらに、次の特徴づけが与えられる。

命題 8.3.4. $S(\mathbf{b}) \leq 3$ であることと、 \mathbf{b} について次の (i),(ii) の両方が成り立つことが同値である。

- (i) \mathbf{b} は連続部分列 $(1, 2, 1)$ と $(2, 1, 2)$ をどちらも含まない。
- (ii) \mathbf{b} または \mathbf{b}^* が片側無限数列 u, v を用いて $(u^*, 1, 1, 2, 2, v)$ と表されるとき、 $[v] \leq [u]$ を満たす。

証明. $S(\mathbf{b}) \leq 3$ ならば (i),(ii) を満たすことを示す。 $\ell(u^*, 1 | 2, 1, v)$ を計算すると、 $u, v \geq 1$ であることから

$$\ell(u^*, 1 | 2, 1, v) = [2; 1, v] + [0; 1, u] > [2; 1, 1] + [0; 1, 1] = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

より $(1, 2, 1)$ が \mathbf{b} に含まれないことがわかる。ただし途中の不等式は (2.2.5) から従う (u, v は整数ではないがこの不等式は末尾の成分が正実数でも問題なく成り立つ)。次に \mathbf{b} が $(2, 1, 2)$ を含む場合、直前の結果からこの部分列を $(2, 2, 1, 2)$ と延長することができる。 $\ell(u^*, 2 | 2, 1, 2, v)$ を計算すると

$$\ell(u^*, 2 | 2, 1, 2, v) = [2; 1, 2, v] + [0; 2, u] > [2; 1, 2] + [0; 2, 1] = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$$

となるので、(i) が成り立つ。また、 $[v] > [u]$ を仮定すると

$$\ell(u^*, 1, 1 | 2, 2, v) = [2; 2, v] + [0; 1, 1, u] > [2; 2, v] + [0; 1, 1, v] = \frac{5[v] + 2}{2[v] + 1} + \frac{[v] + 1}{2[v] + 1} = 3$$

となるので (ii) が成り立つ。

次に逆を示す。数列 \mathbf{b} の区切り方で (1) $\ell(u^* | 1, v)$, (2) $\ell(u^*, 1 | 2, v)$, (3) $\ell(u^*, 2 | 2, v)$ に分けて示す。(1) の場合、(ii) の条件から

$$\ell(u^* | 1, v) = [1; v] + [0; u] < [1; 1] + [0; 1] = 3$$

となり成立する。

(2) の場合、(i) の条件から $(1, 2, 1)$ と $(2, 1, 2)$ が \mathbf{b} に含まれないため、 $u = (1, u'), v = (2, v')$ と分解される。したがって

$$\ell(u^*, 1 | 2, v) = \ell((u')^*, 1, 1 | 2, 2, v') = [2; 2, v'] + [0; 1, 1, u'] \leq [2; 2, u'] + [0; 1, 1, u'] = 3$$

となり、成立する。

(3) の場合はさらに (3-1) $v = (1, v')$, (3-2) $v = (2, v')$ に分けて示す。(3-1) の場合、 $(2, 1, 2)$ が \mathbf{b} に含まれないために $v' = (1, v'')$ と分解される。ここで補題 8.3.3 を使うことで

$$\ell(u^*, 2 | 2, 1, v') = \ell(u^*, 2 | 2, 1, 1, v'') = \ell((v'')^*, 1, 1 | 2, 2, u) \leq 3$$

が成り立つ (最後の不等式は (2) の場合と同じ処理を \mathbf{b}^* に適用している)。(3-2) の場合は

$$\ell(u^*, 2 | 2, 2, v') < [2; 2, v'] + [0; 2, u] < [2; 2] + [0; 2] = 3$$

となって成り立つ。以上から示された。

□

注 8.3.5. (ii) の条件は、 $x, y \in \{1, 2\}$ と数列 w を用いて $\mathbf{b} = (\dots, x, w^*, 1, 1, 2, 2, w, y, \dots)$ と表されるときに

$$x = 1, y = 2 \Rightarrow |w| \text{ が奇数}, \quad x = 2, y = 1 \Rightarrow |w| \text{ が偶数}$$

の形でこのあと使われる。

以下、数列の成分として $1^n, 2^m$ のように書く場合、これは 1 が n 回、2 が m 回連続で現れることを表すものとする。

定理 8.3.6. $S(\mathbf{b}) \leq 3$ であるとき、 \mathbf{b} は次のいずれかである。

- (1) $(\bar{1}^*, 2, 2, \bar{1}), (\bar{2}^*, 1, 1, \bar{2})$ (退化型)
- (2) $(\bar{1}^*, \bar{1}), (\bar{2}^*, \bar{2})$ (定数型)
- (3) $(\dots, 1^{m_i-1}, 2^{n_i-1}, 1^{m_i}, 2^{n_i}, 1^{m_{i+1}}, 2^{n_{i+1}}, \dots)$ (正則型)

ただし任意の j に対して m_j, n_j は偶数である。

証明. まず、 \mathbf{b} において、1 が連続して現れる回数が有限のときにその数が偶数になることを示す。 $\mathbf{b} = (\dots, 2, 1^m, 2^n, 1, \dots)$ に対して m が奇数であると仮定する。このとき $n = 1$ と仮定すると \mathbf{b} に $(1, 2, 1)$ が含まれることになり命題 8.3.4 の条件 (i) に矛盾する。 $n \geq 3$ ($n = \infty$ を含む) と仮定する。もし $m = 1$ ならば \mathbf{b} に $(2, 1, 2)$ が含まれるので、命題 8.3.4 の条件 (i) に矛盾する。もし $m \geq 3$ ならば \mathbf{b} に $(1, 1, 1, 2, 2, 2)$ が含まれることになるが、 $\ell(\dots, 1, 1, 1 \mid 2, 2, 2, \dots)$ を考えるとこれは命題 8.3.4 の条件 (ii) に矛盾する。したがって $n = 2$ である。このとき

$$\mathbf{b} = (\dots, 2, 1^{m-2}, 1, 1, 2, 2, 1^p, 2^{n'}, \dots)$$

と与えられるが、このとき命題 8.3.4 の条件 (ii) から $p \leq m - 2$ の奇数でなくてはならない。すると、直前の議論と同様に $n' = 2$ となる。この議論を繰り返すことで、右に行くほど 1 が続く回数は狭義単調減少しなければならぬことになり、 \mathbf{b} が無限列であることからそれは不可能である。したがって m は偶数である。同様の議論により、2 が連続して現れる回数が有限のときもその数は偶数である (補題 8.3.3 を使って数列を反転させることで同じ議論に落とし込む)。この議論から正則型の n_j, m_j が偶数であることは示されたことに注意しておく。

さて、 \mathbf{b} の左側に 1 が無限に続く場合で定数型ではない場合、すなわち $\mathbf{b} = (\bar{1}^*, 2, 2, v)$ となっている場合を考える。 $v = (\bar{1})$ ならそれは退化型なので、 $v \neq (\bar{1})$ を仮定する。ここで $\mathbf{b} = (\bar{1}^*, 2, 2, 1^p, 2, \dots)$ とする (ここでは $p = 0$ も考慮に入れるとする) と、命題 8.3.4 の条件 (ii) から p は奇数でなくてはならないが、先に示したことからそれは不可能である。以上から \mathbf{b} の左側に 1 が無限に続く定数型ではないものは退化型しかないことがわかる。 \mathbf{b} の左側に 2 が無限に続く場合で定数型ではない場合も同様にして、必ず退化型になる。以上から示された。□

ここで、先に退化型と定数型について具体的な値を計算しておく。

命題 8.3.7. \mathbf{b} が退化型のとき $S(\bar{1}^*, 2, 2, \bar{1}) = S(\bar{2}^*, 1, 1, \bar{2}) = 3$ であり、定数型のとき $S(\bar{1}^*, \bar{1}) = \sqrt{5}$, $S(\bar{2}^*, \bar{2}) = 2\sqrt{2}$ である。

証明. $S(\bar{1}^*, \bar{1}), S(\bar{2}^*, \bar{2})$ は数列をどこで区切っても同じ分割を与えるので定義から直接計算できる。

$S(\bar{1}^*, 2, 2, \bar{1}) = 3$ を示す。

$$\ell(\bar{1}^*, 1 | 2, 2, \bar{1}) = [2; 2, \bar{1}] + [0; 1, 1, \bar{1}] = \frac{5[\bar{1}] + 2}{2[\bar{1}] + 1} + \frac{[\bar{1}] + 1}{2[\bar{1}] + 1} = 3$$

であり、上記の結果と補題 8.3.3 から

$$\ell(\bar{1}^*, 1, 2 | 2, \bar{1}) = 3$$

が成り立つ。また、

$$\ell(u^*, 1 | 1, v) = [1; v] + [0; 1, u] < 2 + 1 = 3$$

なので 1 と 2 の間で区切られるケース以外は考えなくてよく、残るパターンは $\ell(\bar{1}^*, 2, 2 | 1, \bar{1})$ だがこれは補題 8.3.3 から $\ell(\bar{1}^*, 1 | 1, 2, 2, \bar{1})$ に等しいので 3 未満である。以上から示された。

次に $S(\bar{2}^*, 1, 1, \bar{2}) = 3$ を示す。

$$\ell(\bar{2}^*, 1, 1 | 2, \bar{2}) = [2; 2, \bar{2}] + [0; 1, 1, \bar{2}] = \frac{5[\bar{2}] + 2}{2[\bar{2}] + 1} + \frac{[\bar{2}] + 1}{2[\bar{2}] + 1} = 3$$

であり、上記の結果と補題 8.3.3 から

$$\ell(\bar{2}^*, 2 | 2, 1, 1, \bar{2}) = 3$$

が成り立つ。また、

$$\ell(u^*, 2 | 2, 2, v) = [2; 2, v] + [0; 2, u] < \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

であり、直前の結果から $\ell(\bar{2}^*, 2 | 2, 1, 1, \bar{2}) = 3$ なので、2 の間で区切られるケースはすべて 3 以下であることがわかる。また、 $\ell(\bar{2}^*, 1 | 1, \bar{2}) < 3$ であることが前半の計算から証明されているので、残るパターンは $\ell(\bar{2}^*, 2 | 1, 1, \bar{2})$ だがこれは補題 8.3.3 から $\ell(\bar{2}^*, 1 | 1, \bar{2})$ に等しいので 3 未満である。以上から示された。□

さて、定理 8.3.6 から、 $S(\mathbf{b}) \leq 3$ ならば \mathbf{b} は (1, 1) と (2, 2) の組み合わせで表現できることがわかる。そこで \mathbf{b} の成分について、(2, 2) を X で置き換え、(1, 1) を Y で置き換えることにする。このとき、先の $S(\mathbf{b}) \leq 3$ であるときの \mathbf{b} の分類は

- (1) $\bar{X}^* Y \bar{X}, \bar{Y}^* X \bar{Y}$ (退化型)
- (2) $\bar{X}^* \bar{X}, \bar{Y}^* \bar{Y}$ (定数型)
- (3) $\dots X^{k_i-1} Y^{\ell_i-1} X^{k_i} Y^{\ell_i} X^{k_{i+1}} Y^{\ell_{i+1}} \dots$ (正則型)

と書き換えることができる。また、命題 8.3.4 から次の特徴づけが与えられる。

命題 8.3.8. 両側無限列 \mathbf{b} について次は同値である：

- (1) $S(\mathbf{b}) \leq 3$ を満たす。
- (2) \mathbf{b} が X と Y による列で表せて、さらに次の 2 条件を両方満たす。
 - (i) $\mathbf{b} = u^* Y X v$ なる表示を持つときに $u = v$ となるか X, Y の列 w, u', v' を用いて $\mathbf{b} = (u')^* X w^* Y X w Y v'$ と表せる。
 - (ii) $\mathbf{b} = u^* X Y v$ なる表示を持つときに $u = v$ となるか X, Y の列 w, u', v' を用いて $\mathbf{b} = (u')^* Y w^* X Y w X v'$ と表せる。

証明. (1) ならば (2) を示す。 $\mathcal{S}(\mathbf{b}) \leq 3$ ならば \mathbf{b} が X と Y による列で表せることは定理 8.3.6 から明らかである。さらに、条件 (i) は命題 8.3.4 の (ii) の \mathbf{b} の条件から従い、条件 (ii) は \mathbf{b}^* の条件から従う。逆に、(2) ならば (1) を示す。 \mathbf{b} が X と Y による列で表せることから命題 8.3.4 の (i) の条件が満たされ、また条件 (i),(ii) から命題 8.3.4 の (ii) の条件が従う。 \square

これを踏まえると、次が成り立つことがわかる。

命題 8.3.9. 両側無限数列 $\mathbf{b} = \dots X^{k_{i-1}}Y^{\ell_{i-1}}X^{k_i}Y^{\ell_i}X^{k_{i+1}}Y^{\ell_{i+1}}\dots$ が $\mathcal{S}(\mathbf{b}) \leq 3$ を満たす正則型数列であるとき、「任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $k_i = 1$ 」、または「任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $\ell_i = 1$ 」のどちらかが成り立つ。

証明. どちらも成り立たないと仮定する。このとき、 $m, n \geq 2$ に対して

$$\mathbf{b} = \dots Y^m(XY)^k X^n \dots \text{ または } \dots X^m(YX)^k Y^n \dots$$

となる（ここでは $k = 0$ の場合も許容する）。このような \mathbf{b} の一部で k が最小となるようなものをとる。 $k = 0$ であると仮定する。このとき $\mathbf{b} = \dots, Y^{m-1}YX X^{n-1} \dots$ または $\mathbf{b} = \dots X^{m-1}XY Y^{n-1} \dots$ となるが、これは \mathbf{b} に $(1, 1, 1, 2, 2, 2)$ か $(2, 2, 2, 1, 1, 1)$ が含まれることになって矛盾する。そこで $k \geq 1$ とする。このとき

$$\mathbf{b} = \dots Y^m(XY)^k X^n (YX)^{k'} Y^{m'} \dots \text{ または } \dots X^m(YX)^k Y^n (XY)^{k'} X^{m'} \dots$$

となる（ただし $m' \geq 2$ となるように k' をとる）。前者の場合、

$$\mathbf{b} = \dots Y^m(XY)^{k-1} X(YX)X^{n-1}(YX)^{k'} Y^{m'} \dots$$

と書ける。中央の $X(YX)X^{n-1}$ の部分について、 $n > 2$ だと命題 8.3.8 (2) の (i) に矛盾するので $n = 2$ でなければならない。さらに $n = 2$ のもとで右側の交互部分が $(YX)^k$ 以上続くと、同じ命題により中央を挟んだ左右の比較条件に反する。したがって $k' < k$ でなければならない。しかしこれは、最初に k を最小にとったことに反する。後者の場合も X と Y を入れ替えれば同様である。 \square

上記の命題において任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $k_i = 1$ が成り立つ場合を X 型、 $\ell_i = 1$ が成り立つ場合を Y 型と呼ぶことにする。

定義 8.3.10. $\mathbf{b} = \dots X^{k_{i-1}}Y^{\ell_{i-1}}X^{k_i}Y^{\ell_i}X^{k_{i+1}}Y^{\ell_{i+1}}\dots$ を正則型両側無限数列とする ($\mathcal{S}(\mathbf{b}) \leq 3$ は課さない)。このとき

$$C^X(\mathbf{b}) := (\dots, (0)^{k_{i-1}-1}, \ell_{i-1}, (0)^{k_i-1}, \ell_i, (0)^{k_{i+1}-1}, \ell_{i+1}, \dots),$$

$$C^Y(\mathbf{b}) := (\dots, k_{i-1}, (0)^{\ell_{i-1}-1}, k_i, (0)^{\ell_i-1}, k_{i+1}, (0)^{\ell_{i+1}-1}, \dots)$$

と定め、これらの列をそれぞれ \mathbf{b} の X 特性列、 Y 特性列という。

\mathbf{b} が X 型である場合、 X 特性列はすべての成分が 1 以上の数列である一方、 Y 特性列は 0 と 1 のみの数列となる。 \mathbf{b} が Y 型である場合は逆に、 Y 特性列はすべての成分が 1 以上の数列である一方、 X 特性列は 0 と 1 のみの数列となる。特性列の言葉を用いると、命題 8.3.8 は次のように言い換えられる（実際に確かめよ）。

命題 8.3.11. 正則型両側無限列 \mathbf{b} について、次の 3 条件は同値である：

(1) $\mathcal{S}(\mathbf{b}) \leq 3$ を満たす。

(2) $C^X(\mathbf{b}) = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ が定義できて、任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} (x_i - 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots) &\preceq (x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}, \dots), \\ (x_i - 1, x_{i-1}, x_{i-2}, \dots) &\preceq (x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, \dots) \end{aligned}$$

が成り立つ。

(3) $C^Y(\mathbf{b}) = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ が定義できて、任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} (y_i - 1, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots) &\preceq (y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}, \dots), \\ (y_i - 1, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots) &\preceq (y_{i+1}, y_{i+2}, y_{i+3}, \dots) \end{aligned}$$

が成り立つ。

ただし、 \preceq は辞書式順序である。

ここで、 X と Y が $(2, 2)$ と $(1, 1)$ の置き換えであることを一旦忘れて、 X, Y による文字列全体がなす自由群を考え、 $\mathfrak{F}(X, Y)$ で表すことにする。 $\mathfrak{F}(X, Y)$ 上の自己同型 $\lambda, \rho \in \text{Aut } \mathfrak{F}(X, Y)$ をそれぞれ生成元の対応が

$$\lambda: \begin{cases} X \mapsto X \\ Y \mapsto XY \end{cases}, \quad \rho: \begin{cases} X \mapsto XY \\ Y \mapsto Y \end{cases}$$

であるようなものとして定義する。それぞれの逆写像は

$$\lambda^{-1}: \begin{cases} X \mapsto X \\ Y \mapsto X^{-1}Y \end{cases}, \quad \rho^{-1}: \begin{cases} X \mapsto XY^{-1} \\ Y \mapsto Y \end{cases}$$

で与えられる。これらは X, Y からなる両側無限列上にも拡張できる。

補題 8.3.12. $\mathcal{S}(\mathbf{b}) \leq 3$ であるとき、 $\mathcal{S}(\lambda(\mathbf{b})) \leq 3$, $\mathcal{S}(\rho(\mathbf{b})) \leq 3$ が成り立つ。さらに \mathbf{b} が X 型ならば $\mathcal{S}(\rho^{-1}(\mathbf{b})) \leq 3$ が、 Y 型ならば $\mathcal{S}(\lambda^{-1}(\mathbf{b})) \leq 3$ が成り立つ。

証明. \mathbf{b} の特性列に着目すると

$$C^X(\rho(\mathbf{b})) = C^X(\mathbf{b}) + (\bar{1}^*, \bar{1}), \quad C^Y(\lambda(\mathbf{b})) = C^Y(\mathbf{b}) + (\bar{1}^*, \bar{1})$$

となるので命題 8.3.11 から $\mathcal{S}(\lambda(\mathbf{b})) \leq 3$, $\mathcal{S}(\rho(\mathbf{b})) \leq 3$ である。また、 \mathbf{b} が X 型 (Y 型) ならば $C^X(\mathbf{b})$ ($C^Y(\mathbf{b})$) は各成分が 1 以上の数列なので $C^X(\rho^{-1}(\mathbf{b}))$ ($C^Y(\lambda^{-1}(\mathbf{b}))$) が定まり、それぞれ

$$C^X(\rho^{-1}(\mathbf{b})) = C^X(\mathbf{b}) - (\bar{1}^*, \bar{1}), \quad C^Y(\lambda^{-1}(\mathbf{b})) = C^Y(\mathbf{b}) - (\bar{1}^*, \bar{1})$$

となるので命題 8.3.11 からそれぞれ $\mathcal{S}(\rho^{-1}(\mathbf{b})) \leq 3$, $\mathcal{S}(\lambda^{-1}(\mathbf{b})) \leq 3$ である。□

さて、これらの条件を踏まえて、 $\mathcal{S}(\mathbf{b}) \leq 3$ の条件をメカニカル語の言葉で記述することを考えよう。

補題 8.3.13. \mathbf{c} が傾き $t \in [1, \infty]$ のメカニカル語であるとする。このとき $\lambda(\mathbf{c})$ と $\rho(\mathbf{c})$ もメカニカル語であり、それぞれの傾きは

$$L(t) = 2 - \frac{1}{t}, \quad R(t) = t + 1$$

で与えられる。

証明. $t = \infty$ の場合は明らかである。実際、 $\mathbf{c} = \dots YYY \dots$ であり、 $\lambda(\mathbf{c}) = \dots XYXYXY \dots$ は傾き 2 のメカニカル語、 $\rho(\mathbf{c}) = \dots YYY \dots$ は傾き ∞ のメカニカル語である。

また $t = 1$ の場合も明らかである。このとき $\mathbf{c} = \dots XXX \dots$ であり、 $\lambda(\mathbf{c}) = \dots XXX \dots$ は傾き 1 のメカニカル語、 $\rho(\mathbf{c}) = \dots XYXYXY \dots$ は傾き 2 のメカニカル語である。

以下、 $1 < t < \infty$ とする。まず \mathbf{c} が右メカニカル語の場合を示す。 $\mathbf{c} = \mathbf{b}^R(t, \theta)$ と書き、 $r_n = \lceil \frac{n-\theta}{t} \rceil$ とおく。このとき

$$c_n = X \iff r_{n+1} - r_n = 1, \quad c_n = Y \iff r_{n+1} - r_n = 0$$

である。

まず λ を考える。 $\lambda(c_n)$ の始まる位置を P_n とし、 $P_0 = 0$ とする。 $\lambda(X) = X, \lambda(Y) = XY$ であるから、 $P_n = 2n - (r_n - r_0)$ である。各 n について

$$r_n = \frac{n-\theta}{t} + \delta_n, \quad 0 \leq \delta_n < 1$$

と書く。

ここで $t_\lambda = 2 - \frac{1}{t}$ 、 $\theta_\lambda = r_0 + \frac{\theta}{t}$ とおく。 $\lambda(\mathbf{c})$ が傾き t_λ 、切片 θ_λ の右メカニカル語であることを示す。そのために $R_m := \lceil \frac{m-\theta_\lambda}{t_\lambda} \rceil$ と定める。すると

$$P_n = 2n - (r_n - r_0) = \left(2 - \frac{1}{t}\right)n + r_0 + \frac{\theta}{t} - \delta_n = t_\lambda n + \theta_\lambda - \delta_n.$$

したがって $\frac{P_n - \theta_\lambda}{t_\lambda} = n - \frac{\delta_n}{t_\lambda}$ であり、 $0 \leq \frac{\delta_n}{t_\lambda} < 1$ より $R_{P_n} = n$ が成り立つ。

いま $c_n = X$ ならば $r_{n+1} - r_n = 1$ なので $P_{n+1} = P_n + 1$ である。よって

$$R_{P_{n+1}} - R_{P_n} = R_{P_{n+1}} - R_{P_n} = 1.$$

これは $\lambda(c_n) = X$ に対応する。

一方、 $c_n = Y$ ならば $r_{n+1} - r_n = 0$ なので $P_{n+1} = P_n + 2$ である。また

$$\frac{P_n + 1 - \theta_\lambda}{t_\lambda} = n + \frac{1 - \delta_n}{t_\lambda}$$

であり、 $0 < \frac{1 - \delta_n}{t_\lambda} < 1$ だから $R_{P_n + 1} = n + 1$ である。さらに、すでに $R_{P_k} = k$ を示しているので、 $R_{P_{n+2}} = R_{P_{n+1}} = n + 1$ である。したがって

$$R_{P_{n+1}} - R_{P_n} = 1, \quad R_{P_{n+2}} - R_{P_{n+1}} = 0.$$

これは $\lambda(c_n) = XY$ に対応する。

以上より

$$\lambda(\mathbf{c}) = \mathbf{b}^R\left(2 - \frac{1}{t}, r_0 + \frac{\theta}{t}\right)$$

である。特に $\lambda(\mathbf{c})$ は傾き $2 - \frac{1}{t}$ のメカニカル語である。

次に ρ を考える。 $\rho(c_n)$ の始まる位置を Q_n とし、 $Q_0 = 0$ とする。 $\rho(X) = XY, \rho(Y) = Y$ であるから、 $Q_n = n + (r_n - r_0)$ である。ここで $t_\rho = t + 1$ 、 $\theta_\rho = \theta - r_0$ とおく。 $\rho(\mathbf{c})$ が傾き t_ρ 、切

片 θ_ρ の右メカニカル語であることを示す。そのために $S_m := \left\lceil \frac{m-\theta_\rho}{t_\rho} \right\rceil$ と定める。先ほどと同じく $r_n = \frac{n-\theta}{t} + \delta_n$ と書くと、

$$\frac{Q_n - \theta_\rho}{t_\rho} = \frac{n + r_n - r_0 - \theta + r_0}{t + 1} = r_n - \frac{t\delta_n}{t + 1}.$$

$0 \leq \frac{t\delta_n}{t+1} < 1$ より、 $S_{Q_n} = r_n$ である。

いま $c_n = Y$ ならば $r_{n+1} - r_n = 0$ なので $Q_{n+1} = Q_n + 1$ である。よって

$$S_{Q_{n+1}} - S_{Q_n} = S_{Q_{n+1}} - S_{Q_n} = r_{n+1} - r_n = 0.$$

これは $\rho(c_n) = Y$ に対応する。

一方、 $c_n = X$ ならば $r_{n+1} - r_n = 1$ なので $Q_{n+1} = Q_n + 2$ である。また、 $r_{n+1} - r_n = 1$ は $\delta_n < \frac{1}{t}$ と同値である。このとき

$$\frac{Q_n + 1 - \theta_\rho}{t_\rho} = r_n + \frac{1 - t\delta_n}{t + 1}$$

であり、 $0 < \frac{1-t\delta_n}{t+1} < 1$ だから $S_{Q_{n+1}} = r_n + 1$ である。さらに

$$S_{Q_{n+2}} = S_{Q_{n+1}} = r_{n+1} = r_n + 1$$

である。したがって

$$S_{Q_{n+1}} - S_{Q_n} = 1, \quad S_{Q_{n+2}} - S_{Q_{n+1}} = 0.$$

これは $\rho(c_n) = XY$ に対応する。

以上より

$$\rho(\mathbf{c}) = \mathbf{b}^R(t+1, \theta - r_0)$$

である。特に $\rho(\mathbf{c})$ は傾き $t+1$ のメカニカル語である。

最後に \mathbf{c} が左メカニカル語の場合を考える。 $\mathbf{c} = \mathbf{b}^L(t, \theta)$ と書き、 $l_n = \lfloor \frac{n-\theta}{t} \rfloor$ とおく。 $\lambda(c_n)$ と $\rho(c_n)$ の始まる位置は、それぞれ $P_n = 2n - (l_n - l_0)$ 、 $Q_n = n + (l_n - l_0)$ である。

この場合、右メカニカル語の場合と同じ計算を床関数で行えば、

$$\lambda(\mathbf{c}) = \mathbf{b}^L \left(2 - \frac{1}{t}, l_0 + \frac{\theta}{t} - \left(1 - \frac{1}{t} \right) \right), \quad \rho(\mathbf{c}) = \mathbf{b}^L(t+1, \theta - l_0 - 1)$$

を得る。したがって左メカニカル語の場合にも、 $\lambda(\mathbf{c})$ と $\rho(\mathbf{c})$ はそれぞれ傾き $2 - \frac{1}{t}$ 、 $t+1$ のメカニカル語である。以上から示された。□

補題 8.3.14. \mathbf{b} が $\mathcal{S}(\mathbf{b}) \leq 3$ を満たす正則型両側無限語であるとする。ここで $\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{b}$ とし、各 $N \geq 0$ に対して $\sigma_N \in \{\lambda, \rho\}$ と両側無限語 $\mathbf{b}^{(N+1)}$ が存在し、

$$\mathbf{b}^{(N)} = \sigma_N(\mathbf{b}^{(N+1)})$$

が成り立つとする。各 $\mathbf{b}^{(N)}$ が定数型にならないと仮定すると、 $\mathcal{S}(\mathbf{b}) = 3$ が成り立つ。

証明. $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(0)}$ は正則型なので、 X 型か Y 型のどちらかである。 X 型ならば $\rho^{-1}(\mathbf{b})$ が存在し、 Y 型ならば $\lambda^{-1}(\mathbf{b})$ が存在する。ここで、もし \mathbf{b} が X 型かつ Y 型ならば $\rho^{-1}(\mathbf{b})$ と $\lambda^{-1}(\mathbf{b})$ の両方が存在するが、 X 型かつ Y 型であるような \mathbf{b} は

$$\mathbf{b} = \cdots XYXYXY \cdots$$

のみであり、これは $\rho^{-1}(\mathbf{b})$ と $\lambda^{-1}(\mathbf{b})$ の両方が定数型になるので \mathbf{b} の条件を満たさない。したがって $\mathbf{b}^{(0)}$ は $\rho^{-1}(\mathbf{b})$ か $\lambda^{-1}(\mathbf{b})$ のどちらか一方のみを持つ。これを $\mathbf{b}^{(1)}$ とすると、 $\mathbf{b}^{(0)} = \sigma_0(\mathbf{b}^{(1)})$ を満たす。このとき補題 8.3.12 から $\mathcal{S}(\mathbf{b}^{(1)}) \leq 3$ なので、 $\mathbf{b}^{(1)}$ は定数型、退化型、正則型のいずれかである。ここで仮定から定数型ではなく、また $\rho^{-1}(\mathbf{b}), \lambda^{-1}(\mathbf{b})$ のどちらも存在しなくなる退化型でもない。したがって $\mathbf{b}^{(1)}$ は再び正則型である。これを繰り返すことにより、各 $\mathbf{b}^{(N)}$ は $\mathcal{S}(\mathbf{b}^{(N)}) \leq 3$ を満たす X 型、 Y 型のどちらか一方であるような正則型であることがわかる。したがって X, Y を含み、さらに部分語 YX を含む。まず次の事実を確認する。ある語が w^*YXw を部分語として含むとする。このとき λ を作用させた語は

$$(\lambda(w)X)^*YX\lambda(w)X$$

を部分語として含む。また ρ を作用させた語は

$$(Y\rho(w))^*YXY\rho(w)$$

を部分語として含む。

実際、 $\lambda(X) = X, \lambda(Y) = XY$ であるから、中央の YX は $\lambda(YX) = XYX$ となり、その中に再び YX が現れる。さらに右側には $\lambda(w)$ の前に X が付くので、右半分は $X\lambda(w)X$ の形になる。左半分については $\lambda(w^*)X = (\lambda(w)X)^*$ が成り立つことを w の長さに関する帰納法で示せばよい。実際、 $|w| = 0$ ならばこれらはどちらも X であり、 $|w| = n$ で成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} \lambda((wX)^*)X &= \lambda(Xw^*)X = X\lambda(w^*)X = X(\lambda(w)X)^* = X(\lambda(wX))^* = (\lambda(wX)X)^*, \\ \lambda((wY)^*)X &= \lambda(Yw^*)X = XY\lambda(w^*)X = XY(\lambda(w)X)^* = XYX\lambda(w)^* = X\lambda(Y)^*\lambda(w)^* \\ &= X(\lambda(w)\lambda(Y))^* = X(\lambda(wY))^* = (\lambda(wY)X)^* \end{aligned}$$

となって $|w| = n + 1$ でも成り立つ。 ρ の場合も同様に、

$$Y\rho(w^*) = (Y\rho(w))^*$$

を用いればよい (w で主張を仮定して Xw と Yw で同様の主張が成り立つことを確かめれば良い)。いま任意の $N \geq 1$ を取る。 $\mathbf{b}^{(N)}$ は部分語 YX を含むので、これを $\emptyset^*YX\emptyset$ と見る。ここに $\sigma_{N-1}, \sigma_{N-2}, \dots, \sigma_0$ を順に作用させると、上で示した事実により、 $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(0)}$ の中に $w_N^*YXw_N$ の形の部分語が現れる。しかも各段階で w は $w \mapsto \lambda(w)X$ または $w \mapsto Y\rho(w)$ に置き換わるので、長さは少なくとも 1 ずつ増える。したがって $|w_N| \geq N$ である。よって \mathbf{b} の中には任意に長い w^*YXw 型の部分語が現れる。このような部分語を $X = (2, 2), Y = (1, 1)$ に戻すと、 $w^*, 1, 1, 2, 2, w$ の形の部分列が任意に長く現れる。したがって、適当な右側無限列 α, β を用いて

$$\mathbf{b} = (\alpha^*, w^*, 1, 1, 2, 2, w, \beta)$$

と書ける場所が任意に長い w について存在する。この場所で区切ると

$$\mathcal{S}(\mathbf{b}) \geq \ell(\alpha^*, w^*, 1, 1 \mid 2, 2, w, \beta) = [2; 2, w, \beta] + [0; 1, 1, w, \alpha].$$

ここで $|w| \rightarrow \infty$ とすると、左右の連分数の共通部分 w が任意に長くなるため、

$$[2; 2, w, \beta] + [0; 1, 1, w, \alpha] \rightarrow 3$$

である。したがって $\mathcal{S}(\mathbf{b}) \geq 3$ が従う。一方仮定として $\mathcal{S}(\mathbf{b}) \leq 3$ があるので $\mathcal{S}(\mathbf{b}) = 3$ である。□

命題 8.3.15. $S(\mathbf{b}) < 3$ ならば、 \mathbf{b} が有理数傾きのメカニカル語である。

証明. $S(\mathbf{b}) < 3$ とする。まず命題 8.3.7 より、 \mathbf{b} が退化型ならば $S(\mathbf{b}) = 3$ なので矛盾。したがって \mathbf{b} は退化型ではない。また $S(\mathbf{b}) < 3$ であるから $S(\mathbf{b}) \leq 3$ である。定理 8.3.6 より、 \mathbf{b} は定数型または正則型である。定数型ならば

$$\dots XXX\dots \quad \text{または} \quad \dots YYY\dots$$

であり、それぞれ傾き $1, \infty$ のメカニカル語である。

以下、 \mathbf{b} が正則型であるとする。このとき $\rho^{-1}(\mathbf{b})$ または $\lambda^{-1}(\mathbf{b})$ のどちらかが定まっているので、定まっている方を $\mathbf{b}^{(1)}$ とおく。これが正則型ならば同様に $\mathbf{b}^{(2)}$ を定め、 $\mathbf{b}^{(n)}$ が正則型でなくなるまでこの操作を繰り返す。有限回で定数型に到達しない場合は、有限回で退化型に到達する場合と、そもそも任意回繰り返しても正則型以外にならない場合の 2 通りがある ($S(\mathbf{b}^{(i)}) \leq 3$ が取りうる全ての i で成立するのでこれ以外はあり得ないことに注意)。前者の場合、すなわち有限回で退化型に到達したならば、退化型には任意に長い w^*YXw 型の対称部分語が現れる。したがって、補題 8.3.14 の証明と同じ議論により、元の \mathbf{b} について $S(\mathbf{b}) = 3$ が従う。これは $S(\mathbf{b}) < 3$ に矛盾する。後者の場合も補題 8.3.14 から $S(\mathbf{b}) = 3$ なので矛盾。したがって \mathbf{b} は定数メカニカル語に有限個の λ, ρ を作用させた語である。このとき補題 8.3.13 より、 \mathbf{b} はメカニカル語である。さらに、傾きは 1 または ∞ から

$$t \mapsto 2 - \frac{1}{t}, \quad t \mapsto t + 1$$

を有限回作用させて得られるので、有理数傾きである。ゆえに \mathbf{b} は有理数傾きのメカニカル語である。□

以上をもってマルコフの定理の証明に移ろう。

定理 8.3.1 の証明. 命題 8.3.15 から、 $S(\mathbf{b}) < 3$ ならばある $t \in [1, \infty] \cap \mathbb{Q}$ が存在して \mathbf{b} が傾き t のメカニカル語であることがわかっている (正確には $X \mapsto 2, 2, Y \mapsto 1, 1$ を代入したものである)。ここで t が有理数なのでこのメカニカル語はシフトを除いて一意であることに注意せよ。このとき、命題 8.2.8 から

$$\mathbf{b} = (\dots s(t), s(t), s(t), \dots)$$

である。したがって定理 8.1.2 から

$$S(\mathbf{b}) = \frac{\sqrt{(3m_t)^2 - 4}}{m_t}$$

であることがわかる。以上から示された。□

8.4 無理数傾き直線によるラグランジュ/マルコフ定数

前節では、 $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$ の場合に、3 未満のマルコフ定数を与える両側無限数列が有理数傾きのメカニカル語から得られることを示した。本節では、一般の (k_1, k_2, k_3, σ) について、有理数傾きではなく無理数傾きの直線を考える。このとき得られる値を考えてみよう。

以下、 $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ を固定し、

$$K := 3 + k_1 + k_2 + k_3$$

とおく。また本節では、傾きは0より大きいものだけを考える。これは第7章で一般化強許容列 $s(t)$ を $t \in [0, \infty] \cap \mathbb{Q}$ に対して定義したことに合わせたものである。正の傾きの直線は、以下では x 座標が増加する向きに向き付ける。逆向きに向き付けても得られる列は反転するだけであり、 S の値は変わらない。

定義 8.4.1. l を0より大きい無理数傾きの向き付けられた直線とし、 l は $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の点を通過しないと仮定する。 l に三角形横断規則と辺横断規則を適用し、 l が通過する順に符号を並べる。この両側無限符号列において同じ符号が連続して現れる個数を順に記録することで得られる両側無限正整数列を

$$\mathbf{b}(l) = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

と書く。ただし添字の原点は任意に選ぶものとし、したがって $\mathbf{b}(l)$ はシフトを除いて定まるものとする。

$S(\mathbf{b})$ はシフトで変化しないため、上の定義における添字の原点の取り方は問題にならない。本節の目標は次の定理を示すことである。

定理 8.4.2. $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ を固定し、 $K = 3 + k_1 + k_2 + k_3$ とおく。 l を $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の点を通過しない0より大きい無理数傾きの直線とする。このとき

$$S(\mathbf{b}(l)) = K$$

が成り立つ。

証明のために、まず4つの補題を用意する。第一の補題は、 S を定義する量 l_n が有限ブロックで任意の精度で近似できるという事実である。

補題 8.4.3. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $N \geq 1$ が存在して、二つの両側無限正整数列 $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ と $\mathbf{c} = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ が

$$a_i = c_i \quad (-N \leq i \leq N)$$

を満たすならば

$$|\ell_0(\mathbf{a}) - \ell_0(\mathbf{c})| < \varepsilon$$

が成り立つ。

証明. 補題 3.1.7 から

$$|[a_0; a_1, \dots] - [c_0; c_1, \dots]| < \frac{1}{N(N-1)}$$

であり、また同様に

$$|[0; a_{-1}, \dots] - [0; c_{-1}, \dots]| < \frac{1}{N(N-1)}$$

である。したがって、

$$|\ell_0(\mathbf{a}) - \ell_0(\mathbf{c})| < \frac{2}{N(N-1)}$$

となる。したがって N を十分大きく取れば両方の差の和を ε 未満にできる。□

次の補題は、無理数傾きの直線から現れる有限ブロックが、有理数傾きの一般化強許容列によって近似できることを述べるものである。

補題 8.4.4. l を $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の点を通過しない 0 より大きい無理数傾きの直線とする。このとき、 $\mathbf{b}(l)$ に現れる任意の有限ブロックは、十分分母の大きいある既約分数 $t \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ に対する周期列

$${}^\infty s(t)^\infty = (\dots, s(t), s(t), s(t), \dots)$$

の中にも現れる。

証明. 有限ブロックを一つ固定する。この有限ブロックは、直線 l のある有限な線分部分が、 $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ の三角形と辺をどの順番で通過し、それらにどの符号が割り当てられるかによって決まっている。 l は $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の点を通過しないので、この有限な線分部分は、それらの点から正の距離だけ離れている。したがって、直線の傾きと切片を十分小さく動かしても、この有限範囲での通過順序と符号は変化しない。

いま l の傾きを τ 、切片を θ とする。有理数 $t = \frac{p}{q}$ を τ に十分近く取る。さらに q を十分大きく取れば、 L_t の整数平行移動によって得られる直線の切片は、 $\frac{1}{q}$ 刻みで任意の切片を近似できる。実際、 L_t を整数ベクトル (m, n) だけ平行移動すると切片は $n - tm$ だけ変化するが、 $t = \frac{p}{q}$ であるから、これらの値は $\frac{1}{q}\mathbb{Z}$ 上を動く。したがって q が十分大きければ、 θ に十分近い切片をもつ L_t の整数平行移動を取ることができる。

この直線は、固定した有限範囲において l と同じ符号列を与える。一方、整数平行移動は $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ の符号規則を保つので、この直線から得られる両側無限列は ${}^\infty s(t)^\infty$ のシフトである。よって、固定した有限ブロックは ${}^\infty s(t)^\infty$ にも現れる。 \square

次の補題は同じ無理数傾きの正則直線から得られる有限ブロック全体が、切片によらないという事実を与える。

補題 8.4.5. l と l' を、どちらも $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の点を通過しない同じ 0 より大きい無理数傾きの直線とする。このとき、 $\mathbf{b}(l)$ に現れる有限ブロック全体と $\mathbf{b}(l')$ に現れる有限ブロック全体は一致する。

証明. 共通の傾きを $\tau \notin \mathbb{Q}$ とする。 l を整数ベクトル (m, n) だけ平行移動すると、切片は $n - \tau m$ だけ変化する。 τ が無理数であるため、定理 A.4.1 を $-\tau$ に適用すれば、集合

$$\{n - \tau m \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

は \mathbb{R}/\mathbb{Z} で稠密である。 $\mathbf{b}(l)$ の有限ブロックを一つ固定する。 l は $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の点を通過しないので、このブロックを与える有限な線分部分は小さな平行移動に対して安定である。上の稠密性により、 l のある整数平行移動を l' に十分近づけることができるので、その有限範囲では同じ符号列、したがって同じ整数ブロックを与える。整数平行移動は $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ の符号規則を保つから、このブロックは $\mathbf{b}(l')$ にも現れることになる。逆向きも同じ議論で示される。 \square

最後に、有理数傾きから得られる周期列の値を確認しておく。

補題 8.4.6. 任意の正の既約分数 $t \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ に対して

$$\mathcal{S}({}^\infty s(t)^\infty) < K$$

が成り立つ。さらに、相異なる正の既約分数の列 $(t_j)_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が無理数 τ に収束するならば、

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{S}({}^\infty s(t_j)^\infty) = K$$

が成り立つ。

証明. 定理 8.1.1 と定理 3.3.3 より、 t に対応する (k_1, k_2, k_3, σ) -GM 数と位置を (m_t, i_t) と書けば、

$$S(\infty s(t)^\infty) = \frac{\sqrt{(Km_t - k_t)^2 - 4}}{m_t}$$

である。右辺は K より小さい。

また t_j が無理数 τ に収束するので、 $t_j = p_j/q_j$ と既約表示したとき $p_j + q_j \rightarrow \infty$ である。したがって、 L_{t_j} が通過する三角形と辺の個数は無限に大きくなり、対応する一般化強許容列 $s(t_j)$ の長さも無限に大きくなる。定理 7.4.4 より m_{t_j} は $F_{s(t_j)}$ の $(2, 1)$ 成分として表されるので、正整数列 $s(t_j)$ の長さが無限に大きくなることから $m_{t_j} \rightarrow \infty$ である。したがって

$$\frac{\sqrt{(Km_{t_j} - k_{t_j})^2 - 4}}{m_{t_j}} = \sqrt{\left(K - \frac{k_{t_j}}{m_{t_j}}\right)^2 - \frac{4}{m_{t_j}^2}} \rightarrow K$$

となる。 □

以上の補題を用いて定理を証明する。

定理 8.4.2 の証明. まず $S(\mathbf{b}(l)) \leq K$ を示す。任意の $r \in \mathbb{Z}$ を固定する。 $l_r(\mathbf{b}(l)) \leq K$ を示せばよい。

$\varepsilon > 0$ を任意に取る。補題 8.4.3 より、十分大きい N を取れば、中央の有限ブロック

$$b_{r-N}, \dots, b_r, \dots, b_{r+N}$$

が一致するだけで、 l_r の値は ε 未満の誤差で決まる。補題 8.4.4 より、この有限ブロックは、ある有理数傾き t に対応する周期列 $\infty s(t)^\infty$ の中にも現れる。したがって、ある位置 j について

$$l_r(\mathbf{b}(l)) \leq l_j(\infty s(t)^\infty) + \varepsilon$$

である。ゆえに補題 8.4.6 から

$$l_r(\mathbf{b}(l)) \leq S(\infty s(t)^\infty) + \varepsilon < K + \varepsilon$$

となる。 $\varepsilon > 0$ は任意であったから、 $l_r(\mathbf{b}(l)) \leq K$ である。 r も任意であるため、

$$S(\mathbf{b}(l)) \leq K$$

が従う。

次に $S(\mathbf{b}(l)) \geq K$ を示す。 l の傾きを τ とし、 τ に収束する相異なる既約分数列 $t_j \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ を取る。補題 8.4.6 より

$$S(\infty s(t_j)^\infty) \rightarrow K$$

である。各 j について、周期列 $\infty s(t_j)^\infty$ の中で $S(\infty s(t_j)^\infty)$ を実現する位置を一つ選び、その位置が 0 になるようにシフトした列を $\mathbf{c}^{(j)}$ と書く。周期列では S を与える候補が有限個しかないので、このような位置は必ず取れる。すなわち $l_0(\mathbf{c}^{(j)}) = S(\infty s(t_j)^\infty)$ である。

まず、各 $\mathbf{c}^{(j)}$ の成分が一様に有界であることを確認する。任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$c_n^{(j)} < l_n(\mathbf{c}^{(j)}) \leq S(\mathbf{c}^{(j)}) < K$$

である。ここで $K = 3 + k_1 + k_2 + k_3$ は整数であり、 $c_n^{(j)}$ は正整数であるから、

$$c_n^{(j)} \in \{1, 2, \dots, K-1\}$$

がすべての j, n に対して成り立つ。そこで \mathbb{Z} の元を $0, 1, -1, 2, -2, \dots$ の順に並べる。まず 0 番目の座標に着目すると、 $(c_0^{(j)})_j$ は有限集合 $\{1, \dots, K-1\}$ に値を持つので、ある値を無限回取る。したがって部分列を取ることで、 $c_0^{(j)}$ が一定であると仮定できる。次にその部分列で与えられる $c^{(j)}$ を考えて、その中でさらに部分列を取れば、 $c_1^{(j)}$ も一定であると仮定できる。この操作を $0, 1, -1, 2, -2, \dots$ の順に繰り返し、最後に対角部分列を取る。すると、任意の固定された $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 $c_n^{(j)}$ は十分大きい j で一定になる。したがって

$$c_n := \lim_{j \rightarrow \infty} c_n^{(j)}$$

がすべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して存在する。以下、直前でとった対角部分列を改めて $\mathbf{c}^{(j)}$ と書き、 $\mathbf{c} = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ とおく。

次に $\lim_{j \rightarrow \infty} \ell_0(\mathbf{c}^{(j)}) = \ell_0(\mathbf{c})$ を示す。 $\varepsilon > 0$ を任意に取る。補題 8.4.3 より、ある $N \geq 1$ が存在して、二つの両側無限正整数列が中央有限ブロック $[-N, N]$ で一致すれば、対応する ℓ_0 の値の差は ε 未満になる。いま各 n について、 $c_n^{(j)} \rightarrow c_n$ であり、しかも成分は整数値であるから、有限個の座標 $-N, \dots, N$ については、十分大きい j で

$$c_n^{(j)} = c_n \quad (-N \leq n \leq N)$$

が同時に成り立つ。したがって十分大きい j について $|\ell_0(\mathbf{c}^{(j)}) - \ell_0(\mathbf{c})| < \varepsilon$ である。ゆえに $\ell_0(\mathbf{c}^{(j)}) \rightarrow \ell_0(\mathbf{c})$ が成り立つ。

一方、 $\mathbf{c}^{(j)}$ は $\ell_0(\mathbf{c}^{(j)}) \rightarrow K$ となるように選んでいた。部分列を取ってもこの極限は変わらないので、極限の一意性より $\ell_0(\mathbf{c}) = K$ を得る。

次に、 \mathbf{c} の任意の有限ブロックが $\mathbf{b}(l)$ にも現れることを示す。有限ブロック

$$W = (c_{-N}, c_{-N+1}, \dots, c_N)$$

を固定する。対角部分列の取り方により、十分大きい j に対して

$$(c_{-N}^{(j)}, c_{-N+1}^{(j)}, \dots, c_N^{(j)}) = W$$

が成り立つ。したがって W は、無限個の j について、傾き t_j の有理直線から得られる周期列 $\infty_s(t_j)^\infty$ の中に現れる。

各 j について、 W を読む傾き t_j の有限直線部分を γ_j とする。三角形分割と符号規則は整数平行移動で不変であるから、 γ_j を整数ベクトルだけ平行移動しても、そこから読まれる有限ブロックは変わらない。そこで、各 γ_j の中央点が基本領域 $[0, 1]^2$ に入るように整数平行移動しておく。この中央点の一樣有界性から、部分列を取ることで γ_j の中央点はある点 $P \in [0, 1]^2$ に収束するとしてよい。また W は固定された有限ブロックであり、 $t_j \rightarrow \tau$ であるから、十分大きい j に対して γ_j の長さは一樣に有界である。したがって、さらに部分列を取ることで γ_j は傾き τ で点 P を通る有限直線部分 γ に収束するとしてよい。

ここで、 γ が $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の点を通る場合がある。この場合、局所的には γ_j と同じ有限ブロック W を含んでいるが、 γ 全体で両側無限数列が定義できないという問題が起きるので、平行移動により少し

ずらして直線上から $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ の点を外すことにより、 γ と同じ傾き τ を持ち、 γ_j と同じ有限ブロック W を含むような両側無限数列に対応する直線を与える必要がある。 γ の W を決める区間を変動させないように傾き τ を固定したまま切片を連続的に十分小さく動かし直線の切片全体から非空開区間 I をとる。このとき任意の $\theta' \in I$ に対して、傾き τ の直線 $l_{\theta'}$ は有限ブロック W を読む。この θ' をうまく選ぶことで $l_{\theta'} : y = \tau x + \theta'$ が $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ の点を通らないようにできる。実際、 $l_{\theta'}$ が $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の点 (a, b) を通る条件は $\theta = b - \tau a$ である。したがって、傾き τ の直線が $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の点を通るような切片全体は

$$E_{\tau} = \{b - \tau a \mid (a, b) \text{ は } \widetilde{\mathbb{R}^2} \text{ 上の点}\}$$

という可算集合である。非空開区間 I から可算集合 $I \cap E_{\tau}$ を除いても空ではないので、 $\theta' \in I \setminus (I \cap E_{\tau})$ を取ることができる。このとき $l_{\theta'}$ は $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の点を通過しない。しかも $\theta' \in I$ であるから、 $l_{\theta'}$ から得られる列の中には有限ブロック W が現れる。

一方、最初に固定した直線 l も傾き τ を持ち、 $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の点を通過しない。したがって、補題 8.4.5 より、同じ無理数傾きの正則直線から現れる有限ブロック全体は切片によらない。よって W は $\mathbf{b}(l)$ にも現れる。

いま $\varepsilon > 0$ を任意に取る。補題 8.4.3 より、十分大きい N を取れば、中央ブロック W が一致するだけで ℓ_0 の値は ε 未満の誤差で決まる。この有限ブロックは $\mathbf{b}(l)$ の中にも現れるので、ある位置 q について

$$\ell_q(\mathbf{b}(l)) > \ell_0(\mathbf{c}) - \varepsilon = K - \varepsilon$$

が成り立つ。したがって $\mathcal{S}(\mathbf{b}(l)) \geq K - \varepsilon$ である。 $\varepsilon > 0$ は任意であったから、 $\mathcal{S}(\mathbf{b}(l)) \geq K$ が従う。

以上より、

$$\mathcal{S}(\mathbf{b}(l)) = K = 3 + k_1 + k_2 + k_3$$

が示された。 □

注 8.4.7. $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$ の場合、この定理は無理数傾きのメカニカル語に $X \mapsto (2, 2)$ 、 $Y \mapsto (1, 1)$ を代入して得られる両側無限列が境界値 3 を与えるという事実に対応している。したがって本節の定理は、有理数傾きの一般化強許容列が与える離散値の集積点が $3 + k_1 + k_2 + k_3$ であることを、直線の符号規則の言葉で表したものと見ることができる。

最後に、この値はマルコフ定数としてだけでなくラグランジュ定数としても実現できることを示してこの節を締める。

系 8.4.8. $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\sigma \in \mathfrak{G}_3$ を固定する。さらに l を $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の点を通過しない無理数傾き τ の直線とし、 $\mathbf{b}(l) = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ を (k_1, k_2, k_3, σ) -符号規則によって l から得られる両側無限正整数列とする。このとき任意の $r \in \mathbb{Z}$ に対して $\alpha_r := [0; b_r, b_{r+1}, b_{r+2}, \dots]$ とおけば、 $\mathcal{L}(\alpha_r) = K$ が成り立つ。

証明. $r = 0$ の場合を示せば他の場合は添え字をずらして同じ議論をするだけなので、 $r = 0$ を仮定する。 $\alpha := [0; b_0, b_1, b_2, \dots]$ とおく。定理 3.1.3 から

$$\mathcal{L}(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} ([b_n; b_{n+1}, b_{n+2}, \dots] + [0; b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0])$$

である。一方両側無限列 $\mathbf{b}(l)$ に対して

$$\ell_n(\mathbf{b}(l)) = [b_n; b_{n+1}, b_{n+2}, \dots] + [0; b_{n-1}, b_{n-2}, \dots]$$

とおいていた。ここで2つの連分数

$$[0; b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0] \quad \text{and} \quad [0; b_{n-1}, b_{n-2}, \dots]$$

を比較する。これらは最初の n 個の部分商が一致している。したがって補題 3.1.7 より

$$|[0; b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0] - [0; b_{n-1}, b_{n-2}, \dots]| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つことから

$$\mathcal{L}(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\mathbf{b}(l))$$

が成り立つ。定理 8.4.2 より $\mathcal{S}(\mathbf{b}(l)) = K$ であるからすべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\ell_n(\mathbf{b}(l)) \leq K$ が成り立つ。ゆえに

$$\mathcal{L}(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\mathbf{b}(l)) \leq K$$

である。

逆向きの不等式を示す。任意に $\varepsilon > 0$ を取る。 $\mathcal{S}(\mathbf{b}(l)) = K$ であるから、ある $r_0 \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$\ell_{r_0}(\mathbf{b}(l)) > K - \varepsilon$$

となる。補題 8.4.3 より、十分大きい $N \geq 1$ を取れば、中央有限ブロック

$$W := (b_{r_0-N}, b_{r_0-N+1}, \dots, b_{r_0+N})$$

が一致する任意の両側無限正整数列 \mathbf{a} に対して、対応する中心位置の ℓ -値は $\ell_{r_0}(\mathbf{b}(l))$ と ε 未満しか変わらない。特に $\mathbf{b}(l)$ の中でこの有限ブロック W が中心に現れる位置 q では

$$\ell_q(\mathbf{b}(l)) > K - 2\varepsilon$$

が成り立つ。

以下、この有限ブロック W が $\mathbf{b}(l)$ の正方向に無限回現れることを示す。 W を読むために必要なのは、直線 l の有限部分における有限個の交差だけである。また、 l は $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 上の点を通過しないと仮定しているので、この有限部分は関係する格子点や符号規則の境界から正の距離を持つ。したがって直線 l を十分小さく平行移動してもこの有限部分における交差順序と符号は変わらない。すなわち、同じ有限ブロック W を与える傾き τ の直線の位置全体は、 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ の中で空でない開集合を含む。

この開集合を U と書く。直線 l を傾き τ の方向に正方向へ進めることは、 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上で傾き τ の直線に沿って動かすことに対応する。 τ は無理数であるから、この直線の正方向軌道は $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ で稠密である。したがって、この軌道は U に無限回入る。これは、有限ブロック W が $\mathbf{b}(l)$ の正方向に無限回現れることを意味する。したがって W が中心に現れる位置を $q_1 < q_2 < q_3 < \dots$ と取ることができる。上で見たように、各 i について $\ell_{q_i}(\mathbf{b}(l)) > K - 2\varepsilon$ である。したがって

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\mathbf{b}(l)) \geq K - 2\varepsilon$$

を得る。 $\varepsilon > 0$ は任意であるから

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\mathbf{b}(l)) \geq K$$

である。以上より

$$\mathcal{L}(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\mathbf{b}) = K$$

が従う。 □

8.5 (0, 0, 0) 型と (2, 2, 2) 型の関係性

GM 数の中でも、(0, 0, 0) 型 (通常のマルコフ数のクラス) と (2, 2, 2) 型の間には特別な関係性がある。それを見ることにしよう。 $k_1 = k_2 = k_3 = 2$ の場合、すなわち次の方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 9xyz \quad (8.5.1)$$

を考える。このとき、次の定理が成り立つ。

定理 8.5.1. 正整数三つ組 (a, b, c) がマルコフ方程式の解であるとする。このとき (a^2, b^2, c^2) は (2, 2, 2)-GM 方程式の解である。逆に、正整数三つ組 (A, B, C) が (2, 2, 2)-GM 方程式の解であるならば、 $(\sqrt{A}, \sqrt{B}, \sqrt{C})$ はマルコフ方程式の解である。

証明. 前半の主張を示す。 $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ の場合は明らかである。 (a, b, c) がマルコフ方程式の整数解であると仮定する。このとき、(8.5.1) における (a^2, b^2, c^2) のヴィエタ跳躍が

$$\left(\left(\frac{b^2 + c^2}{a} \right)^2, b^2, c^2 \right), \left(a^2, \left(\frac{a^2 + c^2}{b} \right)^2, c^2 \right), \left(a^2, b^2, \left(\frac{a^2 + b^2}{c} \right)^2 \right)$$

で与えられることを示せば十分である。ここでは最初のヴィエタ跳躍の場合のみを示す。

(8.5.1) における (a^2, b^2, c^2) の最初のヴィエタ跳躍は

$$\left(\frac{(b^2)^2 + 2b^2c^2 + (c^2)^2}{a^2}, b^2, c^2 \right) = \left(\left(\frac{b^2 + c^2}{a} \right)^2, b^2, c^2 \right)$$

となり、所望の形になる。

次に後半の主張を示す。前半の主張と定理 5.1.3 より、(8.5.1) の各正整数解は帰納的に (a^2, b^2, c^2) の形に書け、 (a, b, c) はマルコフ方程式の解である。これにより主張が従う。□

この関係性を使うことにより離散マルコフスペクトラムと (2, 2, 2) 一般化離散マルコフスペクトラムの間にも簡明な関係性が生じることがわかる。

定理 8.5.2. $r \in \mathcal{M}_{0,0,0}$ ならば $3r \in \mathcal{M}_{2,2,2}$ が成り立つ。逆に、 $R \in \mathcal{M}_{2,2,2}$ ならば $\frac{R}{3} \in \mathcal{M}_{0,0,0}$ が成り立つ。

証明. まず前半を示す。 $r \in \mathcal{M}_{0,0,0}$ とすると、あるマルコフ数 m が存在して

$$r = \frac{\sqrt{9m^2 - 4}}{m}$$

と書ける。したがって

$$3r = \frac{3\sqrt{9m^2 - 4}}{m} = \frac{\sqrt{81m^4 - 36m^2}}{m^2} = \frac{\sqrt{(9m^2 - 2)^2 - 4}}{m^2}$$

となる。定理 8.5.1 より、 m^2 は (2, 2, 2)-GM 数である。よって $3r \in \mathcal{M}_{2,2,2}$ が従う。

後半は上の計算を逆に辿ることで従う。□

8.6 フロベニウスの一意性予想とその一般化

本節ではフロベニウスの一意性予想の自然な一般化について議論する。元の予想は次の主張である。

予想 8.6.1 ([Fro13]). 任意のマルコフ数 c に対して、 $a \leq b \leq c$ を満たすマルコフトリプル (a, b, c) は一意に存在する。

これは、マルコフツリーと分数ラベルの言葉で言い換えると次の主張となる。

予想 8.6.2. $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ を固定し、 $\text{MT}(0, 0, 0, \sigma)$ を考える。既約分数 $t, s \in [1, \infty]$ に対し、分数ラベルがそれぞれ t, s であるマルコフ数を m_t, m_s とする。このとき $m_t = m_s$ ならば $t = s$ が成り立つ。

上記の素朴な予想には、次の予想が背景としてある。

予想 8.6.3. 任意の $L \in \mathcal{M}_{0,0,0}$ に対して、 $L = \mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\beta)$ ならば、 α と β は $GL(2, \mathbb{Z})$ 同値である。

すなわち、3 未満のラグランジュスペクトラムを与える無理数は $GL(2, \mathbb{Z})$ 同値による差を除いて同値であろうという予想である。そして、この 2 つの予想はマルコフの定理のもとで同値である。

命題 8.6.4. 予想 8.6.1 (予想 8.6.2) と予想 8.6.3 は同値である。

証明. 予想 8.6.2 が成り立つとする。 $L = \mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\beta)$ となる α, β であって、 $\alpha \sim \beta$ でないものが存在すると仮定する。 $L \in \mathcal{M}_{0,0,0}$ であるとき、特に $L < 3$ である。したがって、 L を与える両側無限列は命題 8.3.15 によって有理傾きのメカニカル語に対応する。そこで、系 3.3.4 の操作で取れる α, β に対応する両側無限列をそれぞれ t, s に対応するメカニカル語 $\mathbf{b}_t, \mathbf{b}_s$ とする。定理 2.4.6 より、 $\alpha \sim \beta$ でないことからこの 2 つの数列は循環シフトを許しても一致しないことがわかる。したがって $t \neq s$ である。ここで今予想 8.6.2 の成立を仮定しているので $m_t \neq m_s$ であるが、

$$\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{S}(\mathbf{b}_t) = \frac{\sqrt{9m_t^2 - 4}}{m_t}, \quad \mathcal{L}(\beta) = \mathcal{S}(\mathbf{b}_s) = \frac{\sqrt{9m_s^2 - 4}}{m_s} \quad (8.6.1)$$

なので $\mathcal{L}(\alpha) \neq \mathcal{L}(\beta)$ となって矛盾する。したがって $\alpha \sim \beta$ である。

次に予想 8.6.3 が成り立つとする。 $t, s \in [1, \infty] \cap \mathbb{Q}$ に対して $t \neq s$ とする。 $\mathbf{b}_t, \mathbf{b}_s$ をそれぞれ傾きが t, s のメカニカル語とすると、命題 8.2.7 から $\mathbf{b}_t \neq \mathbf{b}_s$ である。より正確には、 $t \neq s$ ならば循環シフトを許しても同じ周期列にはならない。いま予想 8.6.3 が成立することを仮定しているので、 $\mathbf{b}_t, \mathbf{b}_s$ から系 3.3.4 の操作で取れる 2 次無理数をそれぞれ α, β とすると $\mathcal{L}(\alpha) \neq \mathcal{L}(\beta)$ である。このときやはり (8.6.1) が成り立つので、 $m_t \neq m_s$ である。よって示された。 \square

予想 8.6.1 の一般化として、著者と松下 [GM23b] は次の問題を提起した。

問題 8.6.5. 任意の (k_1, k_2, k_3) -GM 数 c に対して、 $a \leq b \leq c$ を満たす (k_1, k_2, k_3) -GM 三つ組 (a, b, c) は一意に存在するか？

同様に、予想 8.6.3 の一般化として、次の問題も考えられる。

問題 8.6.6. 任意の $L \in \mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3}$ に対して、 $L = \mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\beta)$ ならば、 α と β は $GL(2, \mathbb{Z})$ 同値か？

なお、問題 8.6.5 と問題 8.6.6 は同値ではないことに注意する。

問題 8.6.5 の反例は、 k_1, k_2, k_3 が互いに異なる場合に現れる。実際、 $(1, 81, 17)$ と $(7, 81, 2)$ はともに $(1, 2, 0)$ -GM トリプル（さらに $(1, 2, 0)$ -GM 方程式の正整数解）である。

[Hur91] によれば、問題 8.6.6 は $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{0,0,0}$ に対しては成り立たないことが知られている。ここではこの現象の具体例を与える。 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ でない場合、定理 8.1.1 に由来する明らかな反例が存在する。一般化された強許容列 $s(t)$ に対して $\alpha = [\overline{s(t)}]$ 、 $\beta = [\overline{s^*(\frac{1}{t})}]$ とおくと、定理 8.1.1 により $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\beta)$ が成り立つ。

さらに、注 7.4.3 (7) により、 $\overline{s(t)}$ と $\overline{s^*(\frac{1}{t})}$ の周期部分は、一般には循環シフトを許しても一致しない ($k_1 = k_2 = k_3 = 0$ の場合を除く)。定理 2.4.6 より、2つの無理数が $GL(2, \mathbb{Z})$ 同値であることと周期部分が循環シフトを除いて一致することは同値であるから、 α と β は一般には $GL(2, \mathbb{Z})$ 同値ではない。

さらに、このタイプに属さない反例も存在する。これは問題 8.6.5 の反例を用いて構成できる。実際、

$$L = \frac{\sqrt{((3+0+1+2)81-2)^2-4}}{81} = \frac{2\sqrt{723}}{9}$$

とおく。このとき、 $L = \mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\beta)$ を満たす異なる 2つの二次無理数 α, β が存在する。一つは $(1, 2, 0)$ -GM トリプル $(1, 81, 17)$ に対応し、もう一つは $(7, 81, 2)$ に対応する。

$(1, 81, 17)$ は $MT(1, 2, 0, \text{id})$ の頂点に対応し、81 の分数ラベルは $\frac{1}{3}$ である。このとき対応する二次無理数は

$$\alpha = [\overline{5, 1, 3, 3, 1, 4}] = \frac{\sqrt{723} + 25}{9}$$

である。一方、 $(7, 81, 2)$ は $MT(1, 2, 0, (1\ 2\ 3))$ の頂点に対応し、分数ラベルは $\frac{2}{3}$ であり、

$$\beta = [\overline{5, 1, 1, 5, 3, 2}] = \frac{\sqrt{723} + 23}{9}$$

となる。これらの周期部分は一致せず、また互いの循環シフトや逆順にもなっていない。したがって、この一致は同じ周期連分数から来る自明な一致ではなく、異なる GM 木に属する GM 数が同じ値を与えることに由来する。

このような反例を与える $(1, 81, 17)$ と $(7, 81, 2)$ は異なる GM 木から生じる（前者は $\sigma = \text{id}$ であり、後者は $\sigma = (1\ 2\ 3)$ である）。このことは、フロベニウスの一意性予想の一般化概念を考える際は、同値な予想 8.6.2 の一般化を考えることが適切であることを示唆している。

予想 8.6.7. $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ を固定し、 $MT(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ を考える。既約分数 $t, s \in [1, \infty]$ に対し、分数ラベルがそれぞれ t, s である (k_1, k_2, k_3) -GM 数を m_t, m_s とする。このとき $m_t = m_s$ ならば $t = s$ が成り立つ。

ここで区間は $[1, \infty]$ としているが、反転 $t \mapsto 1/t$ と定理 5.2.10 に現れる σ^* への置き換えによって、 $[0, 1]$ 側で考えても同じ問題である。

$k_1 = k_2 = k_3$ のとき、 $MT(k_1, k_2, k_3, \sigma)$ は本質的に σ に依らない。この場合、この予想は問題 8.6.5 の $k_1 = k_2 = k_3$ の場合に対して肯定的な答えを与えることと同値である。一方、 k_1, k_2, k_3 が

互いに異なる場合、この木は σ に依存し、この予想は問題 8.6.5 とは同値でなくなる。現在のところ、この予想の反例は知られていない。

w	$\bar{L}_t(w)$	$\widetilde{L}_t(w)$	$N(w)$
(1, 3, 3, 1, 5, 4, 1, 3, 4)			8227
(3, 3, 1, 5, 4, 1, 3, 4, 5)			32957
(3, 1, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 1)			12039
(1, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 1, 3)			12041
(5, 4, 1, 3, 4, 5, 1, 3, 3)			32937
(4, 1, 3, 4, 5, 1, 3, 3, 1)			8261
(1, 3, 4, 5, 1, 3, 3, 1, 5)			9997
(3, 4, 5, 1, 3, 3, 1, 5, 4)			31881
(4, 5, 1, 3, 3, 1, 5, 4, 1)			12199
(5, 1, 3, 3, 1, 5, 4, 1, 3)			11127

表 8.2 $\bar{L}_t(w)$ と $\widetilde{L}_t(w)$

t	$s(t)$	$\alpha = [\overline{s(t)}]$	m_t	$\mathcal{L}(\alpha)$
$\frac{0}{1}$	(1, 1)	$\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$	1	$\sqrt{5}$
$\frac{1}{1}$	(2, 2)	$\sqrt{2} + 1$	2	$2\sqrt{2}$
$\frac{1}{2}$	(2, 1, 1, 2)	$\frac{\sqrt{221} + 11}{10}$	5	$\frac{\sqrt{221}}{5}$
$\frac{1}{3}$	(2, 1, 1, 1, 1, 2)	$\frac{\sqrt{1517} + 29}{26}$	13	$\frac{\sqrt{1517}}{13}$
$\frac{2}{3}$	(2, 1, 1, 2, 2, 2)	$\frac{\sqrt{7565} + 63}{58}$	29	$\frac{\sqrt{7565}}{29}$
$\frac{1}{4}$	(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)	$\frac{5\sqrt{26} + 19}{17}$	34	$\frac{10\sqrt{26}}{17}$
$\frac{1}{5}$	(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)	$\frac{\sqrt{71285} + 199}{178}$	89	$\frac{\sqrt{71285}}{89}$
$\frac{3}{4}$	(2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)	$\frac{\sqrt{257045} + 367}{338}$	169	$\frac{\sqrt{257045}}{169}$

表 8.3 $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$

t	$s(t)$	$\alpha = [\overline{s(t)}]$	m_t	$\mathcal{L}(\alpha)$
$\frac{0}{1}$	(2, 1)	$\sqrt{3} + 1$	1	$2\sqrt{3}$
$\frac{1}{1}$	(3, 2)	$\frac{\sqrt{15} + 3}{2}$	2	$\sqrt{15}$
$\frac{1}{2}$	(3, 1, 1, 3)	$\frac{5\sqrt{29} + 23}{14}$	7	$\frac{5\sqrt{29}}{7}$
$\frac{1}{3}$	(3, 1, 2, 1, 1, 3)	$\frac{7\sqrt{51} + 43}{25}$	25	$\frac{14\sqrt{51}}{25}$
$\frac{2}{3}$	(3, 1, 1, 3, 3, 2)	$\frac{\sqrt{11235} + 83}{53}$	53	$\frac{2\sqrt{11235}}{53}$
$\frac{1}{4}$	(3, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 3)	$\frac{\sqrt{15293} + 107}{62}$	93	$\frac{\sqrt{15293}}{31}$
$\frac{1}{5}$	(3, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 3)	$\frac{3\sqrt{53207} + 599}{346}$	346	$\frac{3\sqrt{53207}}{173}$
$\frac{3}{4}$	(3, 1, 1, 3, 2, 3, 3, 2)	$\frac{\sqrt{308765} + 435}{278}$	417	$\frac{\sqrt{308765}}{139}$

表 8.4 $(k_1, k_2, k_3, \sigma) = (0, 0, 1, \text{id})$

t	$s(t)$	$\alpha = \lceil \overline{s(t)} \rceil$	m_t	$\mathcal{L}(\alpha)$
$\frac{0}{1}$	(2, 1)	$\sqrt{3} + 1$	1	$2\sqrt{3}$
$\frac{1}{1}$	(3, 3)	$\frac{\sqrt{13} + 3}{2}$	3	$\sqrt{13}$
$\frac{1}{2}$	(3, 1, 2, 3)	$\frac{\sqrt{399} + 17}{10}$	10	$\frac{\sqrt{399}}{5}$
$\frac{1}{3}$	(3, 1, 2, 2, 1, 3)	$\frac{\sqrt{21605} + 127}{74}$	37	$\frac{\sqrt{21605}}{37}$
$\frac{2}{3}$	(3, 1, 2, 3, 3, 3)	$\frac{\sqrt{47523} + 185}{109}$	109	$\frac{2\sqrt{47523}}{109}$
$\frac{1}{4}$	(3, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 3)	$\frac{5\sqrt{3003} + 237}{137}$	137	$\frac{10\sqrt{3003}}{137}$
$\frac{1}{5}$	(3, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 3)	$\frac{\sqrt{4173845} + 1769}{1022}$	511	$\frac{\sqrt{4173845}}{511}$
$\frac{3}{4}$	(3, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3)	$\frac{\sqrt{5654883} + 2018}{1189}$	1189	$\frac{2\sqrt{5654883}}{1189}$

表 8.5 $(k_1, k_2, k_3, \sigma) = (0, 0, 1, (1\ 2\ 3))$

t	$s(t)$	$\alpha = \lceil \overline{s(t)} \rceil$	m_t	$\mathcal{L}(\alpha)$
$\frac{0}{1}$	(1, 1)	$\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$	1	$\sqrt{5}$
$\frac{1}{1}$	(3, 2)	$\frac{\sqrt{15} + 3}{2}$	2	$\sqrt{15}$
$\frac{1}{2}$	(3, 1, 1, 2)	$\frac{3\sqrt{11} + 8}{5}$	5	$\frac{6\sqrt{11}}{5}$
$\frac{1}{3}$	(3, 1, 1, 1, 1, 2)	$\frac{15\sqrt{3} + 21}{13}$	13	$\frac{30\sqrt{3}}{13}$
$\frac{1}{4}$	(3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)	$\frac{\sqrt{4623} + 55}{34}$	34	$\frac{\sqrt{4623}}{17}$
$\frac{2}{3}$	(3, 1, 1, 3, 2, 2)	$\frac{\sqrt{2669} + 41}{26}$	39	$\frac{\sqrt{2669}}{13}$
$\frac{1}{5}$	(3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)	$\frac{\sqrt{31683} + 144}{89}$	89	$\frac{2\sqrt{31683}}{89}$
$\frac{1}{6}$	(3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)	$\frac{\sqrt{217155} + 377}{233}$	233	$\frac{2\sqrt{217155}}{233}$

表 8.6 $(k_1, k_2, k_3, \sigma) = (0, 0, 1, (1\ 3\ 2))$

t	$s(t)$	$\alpha = \lceil \overline{s(t)} \rceil$	m_t	$\mathcal{L}(\alpha)$
$\frac{0}{1}$	(3, 1)	$\frac{\sqrt{21} + 3}{2}$	1	$\sqrt{21}$
$\frac{1}{1}$	(4, 3)	$\frac{4\sqrt{3} + 6}{3}$	3	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$
$\frac{1}{2}$	(4, 1, 2, 4)	$\frac{\sqrt{1023} + 29}{13}$	13	$\frac{2\sqrt{1023}}{13}$
$\frac{1}{3}$	(4, 1, 3, 2, 1, 4)	$\frac{3\sqrt{2567} + 139}{61}$	61	$\frac{6\sqrt{2567}}{61}$
$\frac{2}{3}$	(4, 1, 2, 4, 4, 3)	$\frac{\sqrt{49506} + 195}{89}$	178	$\frac{2\sqrt{49506}}{89}$
$\frac{1}{4}$	(4, 1, 3, 1, 2, 3, 1, 4)	$\frac{44\sqrt{273} + 666}{291}$	291	$\frac{88\sqrt{273}}{291}$
$\frac{1}{5}$	(4, 1, 3, 1, 3, 2, 1, 3, 1, 4)	$\frac{531\sqrt{43} + 3191}{1393}$	1393	$\frac{1062\sqrt{43}}{1393}$
$\frac{3}{4}$	(4, 1, 2, 4, 3, 4, 4, 3)	$\frac{2\sqrt{9600702} + 5431}{2479}$	2479	$\frac{4\sqrt{9600702}}{2479}$

表 8.7 $(k_1, k_2, k_3, \sigma) = (0, 1, 1, \text{id})$

t	$s(t)$	$\alpha = \lceil \overline{s(t)} \rceil$	m_t	$\mathcal{L}(\alpha)$
$\frac{0}{1}$	(2, 1)	$\sqrt{3} + 1$	1	$2\sqrt{3}$
$\frac{1}{1}$	(4, 3)	$\frac{4\sqrt{3} + 6}{3}$	3	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$
$\frac{1}{2}$	(4, 1, 2, 3)	$\frac{2\sqrt{39} + 11}{5}$	10	$\frac{4\sqrt{39}}{5}$
$\frac{1}{3}$	(4, 1, 2, 2, 1, 3)	$\frac{\sqrt{8463} + 82}{37}$	37	$\frac{2\sqrt{8463}}{37}$
$\frac{1}{4}$	(4, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 3)	$\frac{\sqrt{469221} + 611}{274}$	137	$\frac{\sqrt{469221}}{137}$
$\frac{2}{3}$	(4, 1, 2, 4, 3, 3)	$\frac{2\sqrt{30102} + 305}{139}$	139	$\frac{4\sqrt{30102}}{139}$
$\frac{1}{5}$	(4, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 3)	$\frac{6\sqrt{45298} + 1140}{511}$	511	$\frac{12\sqrt{45298}}{511}$
$\frac{2}{5}$	(4, 1, 2, 2, 1, 4, 3, 1, 2, 3)	$\frac{22\sqrt{43662} + 4050}{1839}$	1839	$\frac{44\sqrt{43662}}{1839}$

表 8.8 $(k_1, k_2, k_3, \sigma) = (0, 1, 1, (1\ 2\ 3))$

t	$s(t)$	$\alpha = \lceil s(t) \rceil$	m_t	$\mathcal{L}(\alpha)$
$\frac{0}{1}$	(2, 1)	$\sqrt{3} + 1$	1	$2\sqrt{3}$
$\frac{1}{1}$	(4, 2)	$\sqrt{6} + 2$	2	$2\sqrt{6}$
$\frac{1}{2}$	(4, 1, 1, 3)	$\frac{12\sqrt{2} + 15}{7}$	7	$\frac{24\sqrt{2}}{7}$
$\frac{1}{3}$	(4, 1, 2, 1, 1, 3)	$\frac{\sqrt{15621} + 111}{50}$	25	$\frac{\sqrt{15621}}{25}$
$\frac{2}{3}$	(4, 1, 1, 4, 3, 2)	$\frac{4\sqrt{1743} + 138}{67}$	67	$\frac{8\sqrt{1743}}{67}$
$\frac{1}{4}$	(4, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 3)	$\frac{\sqrt{53823} + 207}{93}$	93	$\frac{2\sqrt{53823}}{93}$
$\frac{1}{5}$	(4, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 3)	$\frac{12\sqrt{1299} + 386}{173}$	346	$\frac{24\sqrt{1299}}{173}$
$\frac{3}{4}$	(4, 1, 1, 4, 2, 3, 4, 2)	$\frac{\sqrt{2729103} + 1356}{661}$	661	$\frac{2\sqrt{2729103}}{661}$

表 8.9 $(k_1, k_2, k_3, \sigma) = (0, 1, 1, (1\ 3\ 2))$

t	$s(t)$	$\alpha = \lceil s(t) \rceil$	m_t	$\mathcal{L}(\alpha)$
$\frac{0}{1}$	(3, 1)	$\frac{\sqrt{21} + 3}{2}$	1	$\sqrt{21}$
$\frac{1}{1}$	(5, 3)	$\frac{\sqrt{285} + 15}{6}$	3	$\frac{\sqrt{285}}{3}$
$\frac{1}{2}$	(5, 1, 2, 4)	$\frac{5\sqrt{237} + 71}{26}$	13	$\frac{5\sqrt{237}}{13}$
$\frac{1}{3}$	(5, 1, 3, 2, 1, 4)	$\frac{11\sqrt{1101} + 339}{122}$	61	$\frac{11\sqrt{1101}}{61}$
$\frac{2}{3}$	(5, 1, 2, 5, 4, 3)	$\frac{\sqrt{1692597} + 1167}{434}$	217	$\frac{\sqrt{1692597}}{217}$
$\frac{1}{4}$	(5, 1, 3, 1, 2, 3, 1, 4)	$\frac{\sqrt{3045021} + 1623}{582}$	291	$\frac{\sqrt{3045021}}{291}$
$\frac{1}{5}$	(5, 1, 3, 1, 3, 2, 1, 3, 1, 4)	$\frac{\sqrt{69839445} + 7775}{2786}$	1393	$\frac{\sqrt{69839445}}{1393}$
$\frac{3}{4}$	(5, 1, 2, 5, 3, 4, 5, 3)	$\frac{\sqrt{485629365} + 19735}{7346}$	3673	$\frac{\sqrt{485629365}}{3673}$

表 8.10 $(k_1, k_2, k_3) = (1, 1, 1)$

t	$s(t)$	$\alpha = \lceil \overline{s(t)} \rceil$	m_t	$\mathcal{L}(\alpha)$
$\frac{0}{1}$	(5, 1)	$\frac{3\sqrt{5} + 5}{2}$	1	$3\sqrt{5}$
$\frac{1}{1}$	(8, 4)	$3\sqrt{2} + 4$	4	$6\sqrt{2}$
$\frac{1}{2}$	(8, 1, 3, 6)	$\frac{3\sqrt{221} + 43}{10}$	25	$\frac{3\sqrt{221}}{5}$
$\frac{1}{3}$	(8, 1, 5, 3, 1, 6)	$\frac{3\sqrt{1517} + 113}{26}$	169	$\frac{3\sqrt{1517}}{13}$
$\frac{2}{3}$	(8, 1, 3, 8, 6, 4)	$\frac{3\sqrt{7565} + 247}{58}$	841	$\frac{3\sqrt{7565}}{29}$
$\frac{1}{4}$	(8, 1, 5, 1, 3, 5, 1, 6)	$\frac{15\sqrt{26} + 74}{17}$	1156	$\frac{30\sqrt{26}}{17}$
$\frac{1}{5}$	(8, 1, 5, 1, 5, 3, 1, 5, 1, 6)	$\frac{3\sqrt{71285} + 775}{178}$	7921	$\frac{3\sqrt{71285}}{89}$
$\frac{3}{4}$	(8, 1, 3, 8, 4, 6, 8, 4)	$\frac{3\sqrt{257045} + 1439}{338}$	28561	$\frac{3\sqrt{257045}}{169}$

表 8.11 $(k_1, k_2, k_3) = (2, 2, 2)$

t	$s(t)$	$\alpha = \lceil \overline{s(t)} \rceil$	m_t	$\mathcal{L}(\alpha)$
$\frac{0}{1}$	(3, 1)	$\frac{\sqrt{21} + 3}{2}$	1	$\sqrt{21}$
$\frac{1}{1}$	(5, 4)	$\frac{\sqrt{30} + 5}{2}$	4	$\sqrt{30}$
$\frac{1}{2}$	(5, 1, 3, 4)	$\frac{10\sqrt{26} + 47}{17}$	17	$\frac{20\sqrt{26}}{17}$
$\frac{1}{3}$	(5, 1, 3, 3, 1, 4)	$\frac{\sqrt{723} + 25}{9}$	81	$\frac{2\sqrt{723}}{9}$
$\frac{2}{3}$	(5, 1, 3, 5, 4, 4)	$\frac{\sqrt{5004165} + 2061}{746}$	373	$\frac{\sqrt{5004165}}{373}$
$\frac{1}{4}$	(5, 1, 3, 1, 3, 3, 1, 4)	$\frac{\sqrt{1340963} + 1077}{386}$	386	$\frac{\sqrt{1340963}}{193}$
$\frac{1}{5}$	(5, 1, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 1, 4)	$\frac{\sqrt{16635} + 120}{43}$	1849	$\frac{2\sqrt{16635}}{43}$
$\frac{3}{4}$	(5, 1, 3, 5, 4, 4, 5, 4)	$\frac{2\sqrt{150737006} + 22602}{8185}$	8185	$\frac{4\sqrt{150737006}}{8185}$

表 8.12 $(k_1, k_2, k_3, \sigma) = (1, 2, 0, \text{id})$

あとがき：更なる話題

本稿では、ラグランジュスペクトラム、マルコフスペクトラム、一般化マルコフ数、一般化コーン行列、そして一般化離散マルコフスペクトラムまでを扱った。これらは一見するとかなり限定された主題に見えるかもしれないが、実際にはディオファントス近似、連分数、語の組合せ論、双曲幾何、曲面上の団代数、算術幾何、力学系などの多くの分野と接している。本稿を読み終えた読者が次にどこへ進めばよいかを考えるため、(第1章で取り上げた話題との重複を恐れずに) 発展的な話題を列挙する。

なおこの項はインターネット検索を許可した Chat GPT Pro の出力結果を基盤にしている。このような広範囲におよぶ分野の俯瞰という点においては、もはや筆者では生成 AI には敵わないという筆者自身の見解のもとでこの形をとることにした(ただし、それとは別に筆者が加えた項目も存在する)。文章の正確性や挙げている参考文献については原論文をあたるなどしてチェックしており、それを踏まえた上で適切に加筆・編集を行ってはいいるが、筆者にとって専門外の分野の話題も多く挙げていることにご留意願いたい。またごく最近の研究に関しては、根拠となる論文がまだ査読が完了していないプレプリントである場合があることについても注意が必要である。

(1) ホールの半直線、フレイマン定数、遷移区間

マルコフの定理が完全に支配する 3 未満の離散部分と、ホールの半直線が始まる領域の間には、スペクトラムの最も複雑な部分が残されている。Hall は $[6, \infty)$ がラグランジュスペクトラムに含まれることを示し、Freiman は含まれる最大半直線の始点 c_F を決定した [Hal47, Fre75]。このため、古典的スペクトラムをさらに理解するには、 $[3, c_F)$ のいわゆる遷移区間の構造を調べるのが自然な課題になる。読者が本稿の第3章、第4章で学んだ両側無限連分数列による表示は、この区間の研究でも基本的な道具である。現代的な概説としては Cusick–Flahive の古典的モノグラフと、力学系・フラクタル幾何の視点を加えた Lima–Matheus–Moreira–Romana の本が有用である [CF89, LMMR20]。

(2) \mathcal{L} と \mathcal{M} の差はどこから現れるか

本稿では $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ という包含と、3 未満での一致を扱った。次の自然な問いは、 $\mathcal{M} \setminus \mathcal{L}$ がどれほど大きいか、またどれほど 3 に近いところから現れるかである。Moreira は、任意の半直線 $(-\infty, t)$ との交わりについて、ラグランジュスペクトラムとマルコフスペクトラムのハウスドルフ次元が一致することを示した [Mor18]。一方、Erazo–Lima–Matheus–Moreira–Vieira は $\inf(\mathcal{M} \setminus \mathcal{L}) = 3$ を証明し、両者の差が 3 を越えた直後からすでに現れることを明らかにした [ELM+24]。これは「次元の観点では非常に近いが、集合としてはすぐに分岐する」という繊細な現象であり、本稿の第1章で概説した古典理論のその先にある中心的话题である。

(3) 力学的ラグランジュ/マルコフスペクトラム

古典的な \mathcal{L} と \mathcal{M} は両側無限列の切断位置のシフト σ と、0 番目の位置での両側無限列の切断により得た 2 つの連分数の和を与える関数 l_0 の合成 $l_n = l_0 \circ \sigma^n$ の上極限・上限によって表されるが、両側無限列の代わりに集合 X 、連分数シフトの代わりに X の自己写像 $\phi: X \rightarrow X$ 、連分数の和を与える関数の代わりに一般の関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (または \mathbb{C}) をつかって $f(\phi^n(X))$ の上極限・上限を考えることで一般の集合に対してもラグランジュ型・マルコフ型スペクトラムというものを考えることができる。これらは力学的ラグランジュ/マルコフスペクトラムと呼ばれており、今日でも盛んに研究されている。例えば Cerqueira–Matheus–Moreira は面上の面積保存写像の馬蹄形 (ホースシュー) に付随する一般化されたスペクトラムについて、ハウスドルフ次元の連続性や \mathcal{L} 型・ \mathcal{M} 型の次元一致を示した [CMM18]。さらに Cerqueira–Moreira–Romaña は負曲率曲面上の測地流に対して同様の問題を扱っている [CMR22]。古典的な連分数理論をこのような力学系に拡張すると何が保たれ何が失われるか、という観点は今後の一般化理論にも有用である。

(4) 平行移動曲面のラグランジュスペクトラム

古典的なラグランジュスペクトラムは、モジュラー曲面上の測地線がカスプほどの程度深く入り込むかを測る量としても解釈できる。この幾何学的解釈を出発点にすると、平行移動曲面に対してもスペクトラムを定義できる。Artigiani–Marchese–Ulcigrai は平行移動曲面のラグランジュスペクトラムを定式化し [HMU15]、さらに Artigiani–Marchese–Ulcigrai はヴィーチ曲面のラグランジュスペクトラムにホールの半直線が存在することを証明した [AMU16]。このようにモジュラー曲面でない曲面に対するラグランジュスペクトラムの類似物についてもさまざまな研究が存在する。

(5) ラグランジュスペクトラムの乗法的類似

古典的なラグランジュスペクトラムは、等差数列 $n\alpha$ の $\text{mod } 1$ における近似性を背景に持つ。これに対し、秋山–金子は等比数列 $\alpha\beta^n$ の小数部分を用いて、ラグランジュスペクトラムの乗法的類似を導入し [AK21]、とくに β がピゾ数の場合にスペクトラムが閉集合になること、 β が整数の場合と β が二次単数の場合で区間を含むかどうかの違いが現れること、最小の集積点やその下の孤立点を記述できることが示されている [AK21, AK22]。さらに、近年の秋山–釜江–金子の仕事では、この乗法的スペクトラムと記号力学を結ぶ公式がさらに一般の多項式・漸化式的な状況へ拡張されている [AKK25]。

(6) 非対称近似・非斉次近似のスペクトラム

本稿では標準的なラグランジュ定数とマルコフ定数に焦点を当てたが、近似の左右を非対称に扱う、非同次な項を加えるなどすることによって別種のスペクトラムが現れる。例えば Tornheim の非対称近似はこの方向の古典的な例である [Tor55]。2 変数 2 次形式の非同次最小値について扱った古典としては [BSD52a, BSD52b, BSD54] がある。本稿で学んだ 2 次形式の最小値問題と連分数表示は、これらの変種を理解する際の土台になる。一般化マルコフ数から得られる離散値の族が、標準的な \mathcal{L} や \mathcal{M} 以外のスペクトラムにも現れるかどうかは、自然な発展問題である。

(7) フロベニウスの一意性予想とその部分結果

フロベニウスの一意性予想は、マルコフ数の最も有名な未解決問題の一つである。Aigner の本は、この予想を中心にマルコフの定理、分数ラベル、完全マッチングなどを一つの物語として解説している [Aig13]。一意性予想自体は未解決だが、最大成分が素数の場合は Button に

より、素数冪の場合は Schmutz, Lang–Tan, Zhang らの結果により肯定的に解かれている [But98, LT07, Zha06]。なお一般化マルコフ数の一意性予想 (予想 8.6.7) の素数 (冪) パージョンも $k_1 = k_2 = k_3$ の場合に筆者–丸山が解決している [GM23a]。

(8) 分数ラベルによる順序とアイグナー型予想

フロベニウスの分数ラベルは、マルコフ数を単に列挙するだけでなく、大小関係を調べるための座標系にもなる。Lee–Li–Rabideau–Schiffler は傾きや格子点の情報からマルコフ数の大小を判定する精密な不等式を与えた [LLRS23]。McShane は双曲幾何の長さ関数の凸性を用いて関連する予想に新しい証明を与えている [McS21]。本稿で導入した一般化マルコフ数の場合についても、 $k = k_1 = k_2 = k_3$ の場合に Banaian の論文 [Ban25] や Banaian–Huang の論文 [BH26] によって類似・一般化の結果が得られている。

(9) クリストッフエル語、スツルム語

マルコフ数と既約分数の対応は、格子線分を符号化するクリストッフエル語やその非循環類似であるスツルム語の理論と深く結びついている。Reutenauer はクリストッフエル語とマルコフトリプルの対応を明示し、さらにこの主題を組合せ論の立場から体系的に展開した [Reu09, Reu19]。Cohn の行列化は、語を $SL(2, \mathbb{Z})$ の行列積へ送ることで、トレース、連分数、マルコフ数を結びつける [Coh55, Coh71]。本稿の一般化コーン行列は、この古典的な「語から行列へ」という流れを一般化したものと見ることができる。語の反転、循環シフト、原始語の分類などを丁寧に調べると、第 7 章の行列表示の意味がさらに明確になる。

(10) 一点穿孔トーラスの単純閉測地線

マルコフ数は、一点穿孔トーラス上の単純閉測地線の長さや密接に関係している。Cohn はマルコフ形式を一点穿孔トーラス上の測地線で表す視点を与え [Coh71]、McShane–Rivin は一点穿孔トーラス上の単純測地線の長さをホモロジー上のノルムとして調べた [MR95a, MR95b]。この見方では、分数ラベルはトーラスの普遍被覆における原始格子ベクトルの傾きに対応し、マルコフ数はその傾きの測地線長を記録する量となる。Fisac の近年の研究は、単純長さスペクトラムを整数列の巡回シフト同値類の組合せ論に翻訳し、一意性予想の新しい定式化を与えている [Cam25]。

(11) マルコフ写像、ボウディッチ空間、マクシェイン恒等式

マルコフ三つ組を複素数値に拡張し、三分木上の関数として扱えばマルコフ写像の理論が現れる。Bowditch はマルコフ三つ組と一点穿孔トーラス群の擬フックス表現を結びつけ、ボウディッチ条件やマクシェイン恒等式の変種を導いた [Bow98]。この方向では、マルコフ方程式は単なる整数方程式ではなく、自由群 F_2 の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現の指標多様体上のトレース恒等式として理解される。本稿では主に整数値の三つ組を扱ったが、同じ木構造と変異操作が複素指標多様体上にも現れることを知ると、(一般化) マルコフ数の背後にある幾何がより立体的に見える。

(12) 飾り付きタイヒミュラー空間と λ 長さ

Penner の飾り付きタイヒミュラー空間では、曲面上の弧に λ 長さと呼ばれる正の実数が割り当てられ、四角形の対角線交換はトレミー関係式で記述される [Pen87]。これは、曲面上の三角形分割のフリップが団代数の変異に対応するという現代的な見方の幾何学的源流である。Fock–Goncharov の高次タイヒミュラー理論では、局所系のモジュライ空間に正構造とクラスター座標が導入される [FG06, FG09]。本稿の一般化マルコフ方程式は、単に数式を変形した

ものではなく、このような正構造、トレミー型関係式、変異の幾何と連続している。

(13) 曲面上の団代数とスネークグラフ計算

Fomin–Shapiro–Thurston は、境界付き曲面のタグ付き三角形分割と団代数のシードを対応させる理論を構築した [FST08]。Fomin–Thurston はこれを λ 長さの幾何と結びつけ、曲面由来の団変数を正規化された λ 長さとして解釈した [FT18]。Musiker–Schiffler–Williams は曲面由来の団変数をスネークグラフの完全マッチングで表示し [MSW11]、Canakci–Schiffler はスネークグラフ計算と連分数の対応を発展させた [ÇS13, ÇS18]。本稿の第 6 章に現れるフェンス型順序集合、スケイン関係式、一般化マルコフ距離は、この完全マッチング表示と比較すると理解しやすい。

(14) 一般化コーン行列のさらなる構造

本稿で扱った一般化コーン行列は、一般化マルコフ数を行列の成分として実現するための道具であるが、それ自体もさらに豊かな構造をもっている。筆者–丸山–佐藤では、一般化コーン行列と、この行列と平行に定まるマルコフモノドロミー行列と呼ばれる行列が、ともに $SL(2, \mathbb{Z})$ の行列族として導入され、一般化マルコフ方程式の正整数解の木構造を復元する役割を果たすことが示されている [GMS24]。また Banaian–筆者の論文では、これらの行列をローラン多項式係数の行列へ持ち上げることで、一般化コーン行列およびマルコフモノドロミー行列のクラスター化が与えられる [BG25]。したがって、一般化コーン行列の研究は、本稿で述べた一般化マルコフ数の理論を団代数や曲面の組合せ論へ接続する自然な発展方向の一つであるとも言える。

(15) 一般化離散マルコフスペクトラムの位置

本稿の主定理は、一般化マルコフ数から作られる離散的な値が実際にラグランジュスペクトラムに入ることを示す。しかし、この値の集合が \mathcal{L} の中でどの程度大きいのか、どのような蓄積点を持つのか、異なる係数 (k_1, k_2, k_3) から得られる集合がどの程度交わるのかは、まだ多くが未解明である。 $(0, 0, 0)$ の場合には 3 未満の古典的離散部分が復元されるが、一般の係数では得られる値が 3 の上にも現れる。このため、一般化離散マルコフスペクトラムは、古典的離散部分と遷移区間の間を結ぶ具体的な供給源としても見ることができる。

(16) q -変形、ミラー変形、重み付き完全マッチング

マルコフ数の多項式やローラン多項式への変形も近年活発に研究されている。Morier-Genoud–Ovsienko は q -有理数と q -連分数を導入し、ファレイ木や三角形分割と結びつけた [MGO20]。Kantarci Oguz は有向半順序集合とランク行列を用いて q -変形マルコフ数の組合せモデルを与えた [Ogu25]。Evans–Jouteur–Morier-Genoud–Ovsienko は q -変形コーン行列と重み付きスネークグラフの完全マッチングで q -マルコフ数を記述している [EJMGO25]。さらに Bittmann–Jouteur–Kantarci Oguz–Molander–Yildirim はミラー・マルコフ数を導入し、変形されたマルコフ方程式、変異、オービフォールド幾何を結びつけた [BJKO+26]。本稿の一般化マルコフ数も、将来的にはこのような重み付き・変形付きの枠組みへ拡張できる可能性がある。

(17) フリーズパターンとマルコフ数

コンウェイ–コクセターのフリーズパターンは、 A 型の団代数、三角形分割、トレミー関係式と密接に関係している。Propp はフリーズパターンとマルコフ数の組合せ論を完全マッチングのモデルを通じて解説し、正ローラン性がなぜ現れるのかを直観的に説明している [Pro20]。

Morier-Genoud のフリーズパターンに関する概説も、古典的なフリーズから現代的な団代数までをつなぐ入口として有用である [MG15]。本稿の一般化コーン行列やフェンス型順序集合はフリーズパターンそのものではないが、トレミー型関係式、完全マッチング (=順序イデア) という共通の基盤を持つ。

(18) マルコフ-フルヴィッツ方程式と高次元化

古典的なマルコフ方程式は 3 変数の方程式だが、マルコフ-フルヴィッツ方程式

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = ax_1x_2 \cdots x_n + k$$

のような高次元版も研究されている。Gamburd-Magee-Ronan は $n \geq 4$ の場合に整数点の個数に対する漸近公式を与えた [GMR19]。高次元化では、ヴィエタ跳躍による木構造が単純な三分木ではなくなり、整数点の軌道、成長、幾何的数論の問題が前面に出る。一般化マルコフ数の方程式も、係数を変えるだけでなく変数の数を増やす方向へ拡張できるか、またそのときスペクトラムとの接続が残るかは興味深い問題である。

(19) 有限体上のマルコフ方程式

マルコフ方程式を整数上だけでなく有限体 \mathbb{F}_p 上で考えると、ヴィエタ跳躍たちが有限集合上にグラフを作る。Bourgain-Gamburd-Sarnak は、マルコフ曲面の合同解に対するヴィエタ跳躍の作用を調べ、強近似や篩への応用を与えた [BGS16]。さらにこの方向性の研究は Chen によって進められ、[Che24] によって、有限個の例外を除いた p において \mathbb{F}_p 上のマルコフ方程式の解集合に対してヴィエタ跳躍が推移的に作用することが証明された。一般化マルコフ方程式に対しても、合同解のグラフがどのような連結成分を持つか、係数 (k_1, k_2, k_3) によって強近似性がどう変わるかは自然な発展課題であり、現にこの領域に関する結果が [dCILM25, KN26] といった論文に現れている。

(20) マルコフ型 K3 曲面と算術力学

マルコフ型方程式は、K3 曲面や指標多様体の力学にも現れる。Fuchs-Litman-Silverman-Tran はマルコフ型 K3 曲面上の自己同型群の軌道を調べ、有限体上の軌道分解や算術力学的性質を研究した [FLST22]。古典的マルコフ曲面ではヴィエタ跳躍が整数点を生成するが、K3 曲面では同様の対合がより高次の幾何構造上で複雑な力学を生む。これは、マルコフ型方程式を「整数解の木」から「代数多様体上の自己同型群作用」へ拡張する方向であり、一般化マルコフ方程式の代数幾何的意味を考える際の重要な参照点になる。

(21) シンプレクティック幾何と $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$

マルコフ三つ組は、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ の例外束、重み付き射影平面、ラグランジアンセル複体などにも現れる。古典的にはまず Rudakov がマルコフ数を用いて $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ の例外束を分類したことが知られている [Rud89]。近年では Evans-Smith はマルコフ数と $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ 内のラグランジアンセル複体の関係を調べ、シンプレクティック幾何の中にマルコフ数が自然に現れることを示している [ES18]。この方向では、マルコフ方程式はディオファントス近似から離れ、曲面の退化、ミラー対称性、フレア理論に近い文脈で現れる。本稿の一般化マルコフ方程式がどのような幾何的対象を分類しているのか、あるいはどのようなミラー側の変形として現れるのかは、まだ十分に開かれた問題である。

(22) トーリック幾何とヒルツェブルフ-ユング連分数

本稿では主に正則連分数を用いてラグランジュ/マルコフスペクトラムを扱ったが、連分数は

トーリック幾何にも自然に現れる。特に

$$[b_1, \dots, b_r]_- = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{b_r}}}$$

で定義されるヒルツェブルフ–ユング連分数は、二次元巡回商特異点 $\frac{1}{m}(1, q)$ の最小解消を記述する。すなわち

$$\frac{m}{q} = [b_1, \dots, b_r]_-$$

であれば、例外曲線は鎖状に並び、その自己交点数は $-b_1, \dots, -b_r$ で与えられる [Ful93, CLS11, PP07]。この観点からもマルコフ数は代数曲面の退化やワール特異点と結びつく（1つ前の項はシンプレクティック幾何側からの観点だったが、こちらは双有理幾何的な観点である）。Urzúa–Zúñiga は、マルコフ三つ組に付随するワール特異点のヒルツェブルフ–ユング連分数を用いて、マルコフ数の双有理幾何的構造を調べた [UZ23]。さらに一般化マルコフ数についても、ヒルツェブルフ–ユング連分数を通して巡回商特異点との対応が現れる。例えば k -ワール鎖は $[k+2]$ から帰納的に得られるヒルツェブルフ–ユング連分数であり、 k -一般化マルコフ三つ組から生じる巡回商特異点を含むクラスとして研究されている [GMS24, Sat26]。

(23) 成長法則

マルコフ数を大きさ順に数える問題は、Zagier によって古典的に研究されており、与えられた上限以下のマルコフ数の個数は対数的な二次成長を示す [Zag82]。一点穿孔トーラスの単純閉測地線の計数として見ると、ミルザハニの単純閉測地線の成長定理とも同じ大きな文脈に入る [Mir08]。一般化マルコフ数についても、木の深さ、分数ラベルの分母、値の大きさ、対応するスペクトラム値を同時に数えることで、古典理論とは異なる成長法則が現れる可能性がある。計算実験を行う際には、単に値を列挙するだけでなく、どのパラメータに対して何を数えるかを明確にすることが重要である。

(24) 団代数の変異不変量としてのマルコフ型方程式

団代数の変異は、しばしば多項式不変量やディオファントス方程式の正整数解を保つ。Chen–Li は、変異同値類の符号同値性を分類し、マルコフ型方程式への応用を与えている [CL25b]。また Chen–Li、Bao–Li、Chen–Jia らの近年のプレプリントでは、変異不変量、団対称性、トロピカル化などの観点からマルコフ型方程式を調べている [CL25a, BL25, CJ25]。本稿で扱った一般化マルコフ方程式も、変異で保存される量を正整数解の方程式として読む例である。したがって、どのような団代数的不変量が「良い」ディオファントス方程式を生むかを分類する問題は、一般化マルコフ数の理論をさらに広げる可能性を持つ。

以上の話題は、本稿で扱った一般化離散マルコフスペクトラムが孤立した構成ではなく、古典的ディオファントス近似から現代的な団代数・双曲幾何・算術幾何に至る大きな流れの中にあることを示している。本稿の内容を足がかりに、読者がそれぞれの関心に応じてこれらの方向へ進んでくれれば幸いである。

付録 A

本文中で使用した有名事実の証明

A.1 ボルツァノ=ワイエルシュトラスの定理

定理 A.1.1. 有界な実数列 $(x_n)_{n \geq 1}$ は収束する部分列をもつ。

証明. (x_n) が有界であるから、ある実数 a_1, b_1 が存在して

$$a_1 \leq x_n \leq b_1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ。そこで $I_1 = [a_1, b_1]$ とおく。

次に、 I_1 を中点で二等分する。すると、その二つの半区間の少なくとも一方には数列 (x_n) の項が無限個含まれる。実際、もし両方の半区間に含まれる項がそれぞれ有限個しかなければ、 I_1 に含まれる項全体も有限個となってしまう、これは (x_n) がすべて I_1 に入ることに矛盾する。

そこで、 I_1 を二等分した半区間のうち、 (x_n) の項を無限個含む方を I_2 とする。同様にして、 $I_k = [a_k, b_k]$ が定まったら、それを二等分し、そのうち (x_n) の項を無限個含む方を $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ と定める。こうして $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ なる閉区間列が得られ、各 k について

$$b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$$

が成り立つ。また、各 I_k は (x_n) の項を無限個含む。

ここで、各 I_k から部分列を選ぶ。まず I_1 に属する項から x_{n_1} を1つ取る。次に、 I_2 は無限個の項を含むので、 n_1 より大きい添字をもつ項で I_2 に属するものを1つ取り、それを x_{n_2} とする。同様にして、 I_k は無限個の項を含むから、 n_{k-1} より大きい添字をもつ項で I_k に属するものを1つ取り、それを x_{n_k} とする。すると $n_1 < n_2 < \dots$ であり、各 k について $x_{n_k} \in I_k$ が成り立つ。したがって (x_{n_k}) は (x_n) の部分列である。

次に、この部分列が収束することを示す。閉区間列が入れ子になっているので

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots, \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$$

である。数列 (a_k) は上に有界だから、実数の完備性より $x := \sup\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ が存在する。

各 k について、 $I_{k+1} \subset I_k$ であるから $a_j \leq b_k$ がすべての j に対して成り立つ。よって b_k は $\{a_j\}$ の上界であり、 $x \leq b_k$ となる。一方、定義より $a_k \leq x$ であるから、

$$x \in [a_k, b_k] = I_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

が成り立つ。

したがって、各 k について $x_{n_k} \in I_k$ かつ $x \in I_k$ なので、

$$|x_{n_k} - x| \leq b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}.$$

右辺は $k \rightarrow \infty$ で 0 に収束するから、 x_{n_k} は x に収束する。よって (x_n) は収束する部分列をもつ。 \square

A.2 ケーリー・ハミルトンの定理

定理 A.2.1. L を体とし、 $A \in M_n(L)$ とする。 A の特性多項式

$$\chi_A(t) = \det(tE_n - A) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_1t + c_0$$

を考えると、

$$\chi_A(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0E_n = 0$$

が成り立つ。ただし E_n は n 次単位行列である。

証明. 行列 $tE_n - A \in M_n(L[t])$ に対して伴随行列（余因子行列を成分に持つ行列の転置）をとると

$$\text{adj}(tE_n - A)(tE_n - A) = \det(tE_n - A)E_n = \chi_A(t)E_n$$

が成り立つ。

$\text{adj}(tE_n - A)$ の各成分は $(n-1)$ 次以下の多項式であるから、ある $B_0, B_1, \dots, B_{n-1} \in M_n(L)$ が存在して

$$\text{adj}(tE_n - A) = B_{n-1}t^{n-1} + B_{n-2}t^{n-2} + \cdots + B_1t + B_0$$

と書ける。これを上式に代入して展開すると

$$\begin{aligned} & (B_{n-1}t^{n-1} + B_{n-2}t^{n-2} + \cdots + B_1t + B_0)(tE_n - A) \\ &= B_{n-1}t^n + (B_{n-2} - B_{n-1}A)t^{n-1} + \cdots + (B_0 - B_1A)t - B_0A \\ &= (t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_1t + c_0)E_n. \end{aligned}$$

よって係数比較により

$$B_{n-1} = E_n, \quad B_{k-1} = B_kA + c_kE_n \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad -B_0A = c_0E_n$$

を得る。ここで最初の関係から順に代入していくと

$$\begin{aligned} B_{n-2} &= B_{n-1}A + c_{n-1}E_n = A + c_{n-1}E_n, \\ B_{n-3} &= B_{n-2}A + c_{n-2}E_n = A^2 + c_{n-1}A + c_{n-2}E_n, \\ &\vdots \\ B_0 &= A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \cdots + c_2A + c_1E_n. \end{aligned}$$

これを $-B_0A = c_0E_n$ に代入すると

$$-(A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_2A^2 + c_1A) = c_0E_n$$

となるので

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_2A^2 + c_1A + c_0E_n = 0.$$

すなわち $\chi_A(A) = 0$ である。 □

系 A.2.2. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(K)$ とすると

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)E_2 = 0$$

が成り立つ。特に

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E_2 = 0$$

である。

証明.

$$\chi_A(t) = \det(tE_2 - A) = \det \begin{bmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{bmatrix} = (t-a)(t-d) - bc = t^2 - (a+d)t + (ad-bc).$$

したがって、定理より

$$\chi_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E_2 = 0$$

が成り立つ。 □

A.3 線形漸化式を満たす解数列空間の基底

定理 A.3.1. L を体とし、 $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in L$ とする。数列 $(a_m)_{m \geq 0}$ が斉次線形漸化式

$$a_{m+n} + c_{n-1}a_{m+n-1} + \cdots + c_1a_{m+1} + c_0a_m = 0 \quad (m \geq 0)$$

を満たすとする。この漸化式の特性多項式 $p(x) := x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$ が L 上で相異なる n 個の根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ をもつならば、この漸化式を満たす数列全体の L ベクトル空間は $(\lambda_1^m)_{m \geq 0}, (\lambda_2^m)_{m \geq 0}, \dots, (\lambda_n^m)_{m \geq 0}$ の張る空間と一致する。したがって任意の解数列 $(a_m)_{m \geq 0}$ は一意的に

$$a_m = \alpha_1\lambda_1^m + \alpha_2\lambda_2^m + \cdots + \alpha_n\lambda_n^m \quad (m \geq 0)$$

と表される。

証明. まず各 $i = 1, \dots, n$ に対して数列 $u^{(i)} = (\lambda_i^m)_{m \geq 0}$ は与えられた漸化式を満たす。実際

$$\lambda_i^{m+n} + c_{n-1}\lambda_i^{m+n-1} + \cdots + c_1\lambda_i^{m+1} + c_0\lambda_i^m = \lambda_i^m (\lambda_i^n + c_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \cdots + c_1\lambda_i + c_0) = \lambda_i^m p(\lambda_i) = 0$$

であるから、 $u^{(i)}$ は解である。したがってその任意の一次結合もまた解である。このとき

$$\operatorname{span}\{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}\} \subseteq S$$

が成り立つ。ただし S はこの漸化式を満たす数列全体の空間である。

次に逆包含を示す。任意に $a = (a_m)_{m \geq 0} \in S$ を取る。係数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ を

$$a_k = \alpha_1\lambda_1^k + \alpha_2\lambda_2^k + \cdots + \alpha_n\lambda_n^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

で定めたい。これは連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

を解くことで求められる。

左辺の係数行列はヴァンデルモンド行列であり、その行列式は $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$ である。 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は相異なるから、この行列式は 0 ではなく、したがって上の連立方程式はただ一つの解

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n$$

をもつ。ここで

$$b_m = \alpha_1 \lambda_1^m + \alpha_2 \lambda_2^m + \cdots + \alpha_n \lambda_n^m \quad (m \geq 0)$$

とおくと、 $b = (b_m)_{m \geq 0}$ は先に示した通り漸化式の解であり、さらに $k = 0, 1, \dots, n-1$ で $a_k = b_k$ を満たすので $(a_m)_{m \geq 0} = (b_m)_{m \geq 0}$ である。よって

$$S \subseteq \text{span}\{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}\}$$

が従う。以上より

$$S = \text{span}\{(\lambda_1^m)_{m \geq 0}, (\lambda_2^m)_{m \geq 0}, \dots, (\lambda_n^m)_{m \geq 0}\}$$

である。一意性はヴァンデルモンド行列が可逆行列であることから直ちに従う。 \square

A.4 無理数回転軌道の稠密性

定理 A.4.1. $\tau \in \mathbb{R}$ とする。このとき、部分集合

$$\{n + \tau m + \mathbb{Z} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

が \mathbb{R}/\mathbb{Z} において稠密であるための必要十分条件は、 $\tau \notin \mathbb{Q}$ である。

特に、 τ が無理数ならば、

$$\{n + \tau m + \mathbb{Z} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

は \mathbb{R}/\mathbb{Z} で稠密である。

証明. まず、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $n + \mathbb{Z} = 0$ が \mathbb{R}/\mathbb{Z} で成り立つ。したがって

$$\{n + \tau m + \mathbb{Z} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \{m\tau + \mathbb{Z} \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

である。よって、右辺の集合の稠密性を調べればよい。

まず $\tau \in \mathbb{Q}$ とする。このとき $\tau = p/q$ と書ける。ただし $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$, $\gcd(p, q) = 1$ とする。すると

$$m\tau + \mathbb{Z} = \frac{mp}{q} + \mathbb{Z}$$

であるから、 $\{m\tau + \mathbb{Z} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ は高々 q 個の点からなる。したがって有限集合であり、 \mathbb{R}/\mathbb{Z} で稠密ではない。

次に $\tau \notin \mathbb{Q}$ とする。任意の空でない開区間 $I \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を取る。 I の \mathbb{R}/\mathbb{Z} と $[0, 1)$ を同一視した時の長さを $\ell > 0$ として、 $\frac{1}{N} < \ell$ を満たす整数 $N \geq 1$ を取る。いま、 $N + 1$ 個の数

$$0, \tau, 2\tau, \dots, N\tau$$

の小数部分を考える。区間 $[0, 1)$ を長さ $1/N$ の N 個の小区間に分割すると、鳩の巣原理により、ある $0 \leq i < j \leq N$ が存在して、 $\{i\tau\}, \{j\tau\}$ は同じ小区間に入る。ここで $\{x\}$ は x の小数部分を表す。したがって、 $q = j - i$ とおくと、 $1 \leq q \leq N$ かつ $\|q\tau\|_{\mathbb{Z}} < \frac{1}{N}$ が成り立つ。ただし

$$\|x\|_{\mathbb{Z}} := \min_{r \in \mathbb{Z}} |x - r|$$

と定める。 τ は無理数なので $q\tau \notin \mathbb{Z}$ である。よって $\delta := \|q\tau\|_{\mathbb{Z}}$ とおくと、 $0 < \delta < \frac{1}{N}$ である。必要なら q を $-q$ に取り替えることで、

$$q\tau + \mathbb{Z} = \delta + \mathbb{Z}$$

としてよい。ここで、円周 \mathbb{R}/\mathbb{Z} 上の点 $0, \delta, 2\delta, \dots, K\delta$ を考える。ただし $K = \lfloor \frac{1}{\delta} \rfloor$ とする。このとき、隣り合う点の間隔は δ であり、最後の点 $K\delta$ から 1 までの間隔も δ 以下である。したがって、長さが δ より大きい任意の開区間は、これらの点のうち少なくとも一つを含む。

いま

$$\delta < \frac{1}{N} < \ell$$

であるから、開区間 I はある $k\delta + \mathbb{Z}$ を含む。一方、

$$k\delta + \mathbb{Z} = kq\tau + \mathbb{Z}$$

である。したがって、 I は $m\tau + \mathbb{Z}$ の形の点を含む。ただし $m = kq \in \mathbb{Z}$ である。

以上により、任意の空でない開区間 $I \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は $\{m\tau + \mathbb{Z} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ と交わる。ゆえに $\{m\tau + \mathbb{Z} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ は \mathbb{R}/\mathbb{Z} で稠密である。

したがって $\{n + \tau m + \mathbb{Z} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ も \mathbb{R}/\mathbb{Z} で稠密である。 □

参考文献

- [Aig13] M. Aigner. *Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture*. Springer, 2013.
- [AK21] S. Akiyama and H. Kaneko. Multiplicative analogue of Markoff–Lagrange spectrum and Pisot numbers. *Adv. Math.*, Vol. 380, pp. Paper No. 107547, 39 pp., 2021.
- [AK22] S. Akiyama and H. Kaneko. Corrigendum to “multiplicative analogue of Markoff–Lagrange spectrum and Pisot numbers” [Adv. Math. 380 (2021) 107547]. *Adv. Math.*, Vol. 394, pp. Paper No. 107996, 2 pp., 2022.
- [AKK25] S. Akiyama, T. Kamae, and H. Kaneko. Exponential diophantine approximation and symbolic dynamics. *Math. Z.*, Vol. 311, p. Paper No. 70, 2025.
- [AMU16] M. Artigiani, L. Marchese, and C. Ulcigrai. The Lagrange spectrum of a Veech surface has a Hall ray. *Groups Geom. Dyn.*, Vol. 10, No. 4, pp. 1287–1337, 2016.
- [Ban25] E. Banaian. Orderings on k -Markov numbers. arXiv:2512.04026 [math.NT], 2025.
- [BG25] E. Banaian and Y. Gyoda. Cluster algebraic interpretation of generalized Markov numbers and their matrixizations, 2025. arXiv:2507.06900 [math.CO].
- [BGS16] J. Bourgain, A. Gamburd, and P. Sarnak. Markoff triples and strong approximation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, Vol. 354, No. 2, pp. 131–135, 2016.
- [BH26] Esther Banaian and Min Huang. Orderings of generalized k -Markov numbers, 2026. arXiv:2604.17445 [math.NT]; also math.CO.
- [BJKO⁺26] L. Bittmann, A. Jouteur, A. Kantarci-Oguz, L. Molander, and M. Yildirim. A mirror deformation of markov numbers. *preprint*, 2026. arXiv:2602.14802 [math.CO].
- [BKK24] E. Banaian, W. Kang, and E. Kelley. Skein relations for punctured surfaces, 2024. arXiv:2409.04957 [math.CO].
- [BL25] L. Bao and F. Li. The approach of cluster symmetry to Diophantine equations. arXiv:2508.02005 [math.NT], 2025.
- [Bom07] E. Bombieri. Continued fractions and the markoff tree. *Expo. Math.*, Vol. 25, pp. 187–213, 2007.
- [Bow98] B. H. Bowditch. Markoff triples and quasifuchsian groups. *Proc. London Math. Soc.*, Vol. 77, No. 3, pp. 697–736, 1998.
- [BSD52a] E. S. Barnes and H. P. F. Swinnerton-Dyer. The inhomogeneous minima of binary quadratic forms (I). *Acta Mathematica*, Vol. 87, pp. 259–323, 1952.
- [BSD52b] E. S. Barnes and H. P. F. Swinnerton-Dyer. The inhomogeneous minima of binary quadratic forms (II). *Acta Mathematica*, Vol. 88, pp. 279–316, 1952.

- [BSD54] E. S. Barnes and H. P. F. Swinnerton-Dyer. The inhomogeneous minima of binary quadratic forms (III). *Acta Mathematica*, Vol. 92, pp. 199–234, 1954.
- [But98] J. O. Button. The Uniqueness of the prime Markoff numbers. *J. London Math. Soc.*, Vol. 58, pp. 9–17, 1998.
- [Cam25] D. Fisac Camara. Markov’s conjecture on integral necklaces. *Bull. Lond. Math. Soc.*, Vol. 57, No. 12, pp. 4122–4131, 2025.
- [CF89] T.W. Cusick and M.E. Flahive. *The Markoff and Lagrange spectra*, Vol. 30 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 1989.
- [Che24] W. Y. Chen. Nonabelian level structures, Nielsen equivalence, and Markoff triples. *Annals of Mathematics. Second Series*, Vol. 199, No. 1, pp. 301–443, 2024. arXiv:2011.12940 [math.NT].
- [CJ25] Z. Chen and Z. Jia. Tropicalization and cluster asymptotic phenomenon of generalized Markov equations. arXiv:2511.03428 [math.NT], 2025.
- [CL25a] Z. Chen and Z. Li. A cluster theory approach from mutation invariants to Diophantine equations. arXiv:2501.09435 [math.NT], 2025.
- [CL25b] Z. Chen and Z. Li. Sign-equivalence in cluster algebras: Classification and applications to Markov-type equations. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 229, No. 10, p. 108058, 2025.
- [CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck. *Toric Varieties*, Vol. 124 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [CMM18] A. Cerqueira, C. Matheus, and C. G. Moreira. Continuity of Hausdorff dimension across generic dynamical Lagrange and Markov spectra. *J. Mod. Dyn.*, Vol. 12, pp. 151–174, 2018.
- [CMR22] A. Cerqueira, C. G. Moreira, and S. Rom ana. Continuity of Hausdorff dimension across generic dynamical Lagrange and Markov spectra II. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, Vol. 42, No. 6, pp. 1898–1907, 2022.
- [Coh55] H. Cohn. Approach to Markoff’s minimal forms through modular functions. *Ann. of Math.*, Vol. 61, pp. 1–12, 1955.
- [Coh71] H. Cohn. Markoff geodesics in matrix theory. *Amer. Math. Monthly*, Vol. 78, No. 8, pp. 868–871, 1971.
- [CS13]  . anakçı and R. Schiffler. Snake graph calculus and cluster algebras from surfaces. *J. Algebra*, Vol. 382, pp. 240–281, 2013.
- [CS14] L. O. Chekhov and M. Shapiro. Teichmuller spaces of Riemann surfaces with orbifold points of arbitrary order and cluster variables. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, Vol. 2014, No. 10, pp. 2746–2772, 2014.
- [CS18]  . anakçı and R. Schiffler. Cluster algebras and continued fractions. *Compos. Math.*, Vol. 154, No. 3, pp. 565–593, 2018.
- [dCILM25] M. de Courcy-Ireland, M. Litman, and Y. Mizuno. Divisibility by p for Markoff-like Surfaces. arXiv:2509.02187 [math.NT], 2025.

- [Dir42] P. G. L. Dirichlet. Verallgemeinerung eines satzes aus der lehre von den kettenbrüchen nebst einigen anwendungen auf die theorie der zahlen. *S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, pp. 93–95, 1842.
- [EJMGO25] S. Evans, P. Jouteur, S. Morier-Genoud, and V. Ovsienko. On q -deformed Markov numbers. Cohn matrices and perfect matchings with weighted edges, 2025. arXiv:2507.19080 [math.CO].
- [ELM⁺24] J. P. Erazo, Y. Lima, C. Matheus, C. G. Moreira, and M. Vieira. $\inf(M \setminus L)=3$. preprint, 2024. arXiv:2411.06933 [math.NT].
- [ES18] J. D. Evans and I. Smith. Markov numbers and lagrangian cell complexes in the complex projective plane. *Geom. Topol.*, Vol. 22, No. 2, pp. 1143–1180, 2018.
- [Eul37] L. Euler. De fractionibus continuis dissertatio. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, Vol. 9, pp. 98–137, 1737.
- [FG06] V. V. Fock and A. B. Goncharov. Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, Vol. 103, pp. 1–211, 2006.
- [FG09] V. V. Fock and A. B. Goncharov. Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm. *Ann. Sci. Ecole Normale. Sup.*, Vol. 42, No. 6, pp. 865–930, 2009.
- [FLST22] E. Fuchs, M. Litman, J. H. Silverman, and A. Tran. Orbits on K3 surfaces of Markoff type, 2022. arXiv:2201.12588 [math.AG].
- [Fre68] G. A. Freiman. Non-coincidence of the spectra of Markov and of Lagrange. *Mat. Zametki*, Vol. 3, pp. 195–200, 1968.
- [Fre75] G. A. Freiman. The initial point of hall’s ray. *Number-theoretical studies in the Markov spectrum and in the structural theory of set addition*, 1975. in Russian.
- [Fro13] G. Frobenius. Über die Markovschen Zahlen. *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.*, pp. 458–487, 1913.
- [FST08] S. Fomin, M. Shapiro, and D. Thurston. Cluster algebras and triangulated surfaces. part I: Cluster complexes. *Acta Math.*, Vol. 201, pp. 83–146, 2008.
- [FT18] S. Fomin and D. Thurston. Cluster algebras and triangulated surfaces. part ii: Lambda lengths. *Memoirs AMS*, Vol. 255, No. 1223, 2018.
- [Ful93] William Fulton. *Introduction to Toric Varieties*, Vol. 131 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras I: Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 15, pp. 497–529, 2002.
- [FZ07] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras IV: Coefficients. *Compos. Math.*, Vol. 143, pp. 112–164, 2007.
- [GM23a] Y. Gyoda and S. Maruyama. Uniqueness theorem of generalized Markov numbers that are prime powers. preprint, arXiv:2312.07329 [math.NT], 2023.
- [GM23b] Y. Gyoda and K. Matsushita. Generalization of Markov Diophantine equation via generalized cluster algebra. *Electron. J. Combin.*, Vol. 30, p. P4.10, 2023.
- [GMR19] A. Gamburd, M. Magee, and R. Ronan. An asymptotic formula for integer points

- on Markoff–Hurwitz varieties. *Ann. of Math.*, Vol. 190, No. 3, pp. 751–809, 2019.
- [GMS24] Y. Gyoda, S. Maruyama, and Y. Sato. $SL(2, \mathbb{Z})$ -matrixizations of generalized Markov numbers, 2024. arXiv:2407.08203 [math.NT].
- [Gyo25] Y. Gyoda. Generalized discrete Markov spectra. arXiv:2512.04547 [math.NT], 2025.
- [Hal47] M. Hall. On the sum and product of continued fractions. *Ann. of Math.*, Vol. 48, No. 4, pp. 966–993, 1947.
- [HMu15] Pascal Hubert, Luca Marchese, and Corinna Ulcigrai. Lagrange spectra in Teichmüller dynamics via renormalization. *Geometric and Functional Analysis*, Vol. 25, No. 1, pp. 180–255, 2015.
- [Hur91] A. Hurwitz. Ueber die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. *Math. Ann.*, Vol. 39, pp. 279–284, 1891.
- [KN26] Nathaniel Kingsbury-Neuschotz. Strong approximation for the character variety of the four-times punctured sphere, 2026. arXiv:2603.04096 [math.NT].
- [Lag70] J.-L. Lagrange. Additions aux 'el'emens d'algèbre d'euler sur la solution des 'equations num'ériques. *M'emoires de l'Acad'emie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 1770.
- [Lio44] J. Liouville. Sur des classes très 'etendues de quantités dont la valeur n'est ni alg'ebrique, ni même r'eductible à des irrationnelles alg'ebriques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 18, pp. 883–885, 1844.
- [LLRS23] K. Lee, L. Li, M. Rabideau, and R. Schiffler. On the ordering of the Markov numbers. *Adv. appl. Math.*, Vol. 143, p. 102453, 2023.
- [LMMR20] D. Lima, C. Matheus, C. G. Moreira, and S. Romãna. *Classical and Dynamical Markov and Lagrange Spectra*. WORLD SCIENTIFIC, October 2020.
- [LT07] M. L. Lang and S.P. Tan. A simple proof of the Markoff conjecture for prime powers. *Geom. Dedicata*, Vol. 129, pp. 15–22, 2007.
- [Mar79] A. Markoff. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. *Math. Ann.*, Vol. 15, pp. 381–406, 1879.
- [Mar80] A. Markoff. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies (Second Memoir). *Math. Ann.*, Vol. 17, pp. 379–399, 1880.
- [McS21] G. McShane. Convexity and Aigner's Conjectures. preprint, arXiv:2101.03316 [math.NT], 2021.
- [MG15] S. Morier-Genoud. Coxeter's frieze patterns at the crossroads of algebra, geometry and combinatorics. *Bull. Lond. Math. Soc.*, Vol. 47, No. 6, pp. 895–938, 2015.
- [MGO20] S. Morier-Genoud and V. Ovsienko. q -deformed rationals and q -continued fractions. *Forum Math. Sigma*, Vol. 8, p. e13, 2020.
- [Mir08] M. Mirzakhani. Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces. *Ann. of Math.*, Vol. 168, No. 1, pp. 97–125, 2008.
- [Mor18] C. G. Moreira. Geometric properties of the markov and lagrange spectra. *Ann. of Math.*, Vol. 188, No. 1, pp. 145–170, 2018.

- [MR95a] G. McShane and I. Rivin. A norm on homology of surfaces and counting simple geodesics. *Internat. Math. Res. Notices*, Vol. 1995, No. 2, pp. 61–69, 1995.
- [MR95b] G. McShane and I. Rivin. Simple curves on hyperbolic tori. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, Vol. 320, No. 12, pp. 1523–1528, 1995.
- [MSW11] G. Musiker, R. Schiffler, and L. Williams. Positivity for cluster algebras from surfaces. *Adv. Math.*, Vol. 227, pp. 2241–2308, 2011.
- [MSW13] G. Musiker, R. Schiffler, and L. Williams. Bases for cluster algebras from surfaces. *Compos. Math.*, Vol. 149, No. 2, pp. 217–263, 2013.
- [Ogu25] E. Kantarci Oguz. Oriented posets, rank matrices and q -deformed Markov numbers. *Discrete Math.*, Vol. 348, No. 2, p. 114256, 2025.
- [Pen87] R. C. Penner. The decorated teichmüller space of punctured surfaces. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 113, pp. 299–339, 1987.
- [Per21] O. Perron. Über die approximation irrationaler Zahlen durch rationale II. *S.-B. Heidelberg Akad. Wiss.*, Vol. 8, p. 12 pp., 1921.
- [PP07] Patrick Popescu-Pampu. The geometry of continued fractions and the topology of surface singularities. In *Singularities in Geometry and Topology 2004*, Vol. 46 of *Advanced Studies in Pure Mathematics*, pp. 119–195. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2007.
- [Pro20] J. Propp. The Combinatorics of Frieze Patterns and Markoff Numbers. *Integers*, Vol. 20, , 2020.
- [Reu09] C. Reutenauer. Christoffel words and markoff triples. *Integers*, Vol. 9, p. A25, 2009.
- [Reu19] C. Reutenauer. *From Christoffel Words to Markoff Numbers*. Oxford University Press, 2019.
- [Rot55] K. F. Roth. Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika*, Vol. 2, pp. 1–20, 1955.
- [Rud89] A. N. Rudakov. The Markov numbers and exceptional bundles on \mathbb{P}^2 . *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, Vol. 32, No. 1, pp. 99–112, 1989. English translation of the Russian original in *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 52 (1988), no. 1, 100–112.
- [Sat26] Yusuke Sato. k -wahl chains and cyclic quotient singularities, 2026. arXiv:2603.27126 [math.AG].
- [Tor55] L. Tornheim. Asymmetric minima of quadratic forms and asymmetric Diophantine approximation. *Duke Math. J.*, Vol. 22, pp. 287–294, 1955.
- [UZ23] Giancarlo Urzúa and Juan Pablo Zúñiga. The birational geometry of Markov numbers, 2023. arXiv:2310.17957 [math.AG].
- [Zag82] D. Zagier. On the number of Markoff numbers below a given bound. *Math. Comp.*, Vol. 39, No. 160, pp. 709–723, 1982.
- [Zha06] Y. Zhang. An elementary proof of uniqueness of Markov numbers which are prime powers. preprint, arXiv:0606283 [math.NT], 2006.
- [木田 22] 木田 雅成. 連分数. 大学数学 スポットライト・シリーズ 9. 近代科学社, 2022.