

団代数における F 行列

321701058 行田 康晃

指導教員 中西 知樹

目次

第 1 章	序文	5
1.1	団代数の背景	5
1.2	研究概要と論文構成	10
第 2 章	団代数の概要	13
2.1	団代数の定義	13
2.2	主係数を持つ団パターン	16
2.3	分離公式	19
2.4	点付曲面から誘導される団代数	23
第 3 章	団代数の双対定理	29
3.1	後方変異	29
3.2	C 行列と G 行列の双対性	33
3.3	F 行列とその自己双対性	40
3.4	双対定理の具体例	43
第 4 章	F 行列の一意性予想と復元問題	47
4.1	交点数と弧	48
4.2	点付き曲面における団展開公式	50
4.3	タグ付弧の修正	54
4.4	定理 4.1.6 の証明	58
4.5	C 行列, G 行列, F 行列を用いた団と係数の決定	59
付録 A	定理 4.3.4 の計算	69

第 1 章

序文

本稿は著者の団代数に関する研究をまとめた論文である。そこで、この章では団代数の背景と特別な場合の定義、応用例をはじめに述べた上で、著者の団代数に関する結果を述べることにする。

1.1 団代数の背景

団代数とは、団変数と呼ばれる生成元による有理関数体の部分環として定義されるものであり、この団変数は変異と呼ばれる漸化式によって定義される変換によって結びついている。まずは、[FZW16] を元に団代数の背景について具体例を出しながら紹介していくことにする。

1.1.1 全正值性

もともとの団代数のルーツは、Lusztig の全正值性と呼ばれる性質の研究にあるといわれている。そこで、まずは全正值性と団代数の関係性について紹介しよう。 $n \times n$ 実数行列 M が**全正值** (*total positive*) であるとは、任意の小行列式、すなわち M からいくつかの行成分、列成分を取り除いた部分行列の行列式が全て正であるという性質である。より一般に、多様体 Z とその上に定義される正則関数からなる集合 Δ において、 $z \in Z$ が全正值であるとは、任意の $\Delta \in \Delta$ について $\Delta(z) > 0$ であるという性質を指す。さて、与えられた元が全正值かどうかは定義から全ての小行列式または関数について正值であることを確かめればいいのだが、実際は全て確かめる必要がないことがある。例えば、 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ としたとき、与えられる小行列式は $a, b, c, d, \Delta = ad - bc$ の 5 つであるが、このうち a, b, c, Δ が正值であることがわかれば $d = (\Delta + bc)/a$ なので d は常に正值である。よって、全正值性は a, b, c, Δ の 4 つを調べれば十分なのである。このように、「その元が全正值であることを確かめるためにはいくつかの小行列式（または正則関数）を調べれば良いか」という問題を考えることができる（効率的な全正值判定法問題）。これについて、団代数に関連する例をみることにしよう。

Grassmann 多様体 $\text{Gr}_{2,m}(\mathbb{C})$ を考える。これは \mathbb{C} 上 m 次元ベクトル空間の 2 次元部分空間全体で構成される多様体である。 $\text{Gr}_{2,m}(\mathbb{C})$ の元は一次独立な 2 つのベクトルの張る空間なので、 \mathbb{C} 上 m 次元ベクトル空間の基底を任意に固定することで、 $2 \times m$ 行列 z の各列ベクトルで張る空間 $[z]$ と表すことにする。 $2 \times m$ 行列上に定まる関数集合である Plücker 座標 $\{P_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq m}$ を考える。ここで、 $P_{ij}(z)$ は z の i 列目と j 列目による 2×2 行列の行列式を表す。 Plücker 座標 $\{P_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq m}$

は $\text{Gr}_{2,m}(\mathbb{C})$ の $\binom{m}{2}$ - 次元複素射影空間への埋め込みを誘導する. これを Plücker 埋め込みと呼ぶ. また, Plücker 埋め込みにおける $\text{Gr}_{2,m}(\mathbb{C})$ の斉次座標環を Plücker 環と呼ぶ.

まずは $\text{Gr}_{2,m}(\mathbb{C})$ における全正值元を定義する.

定義 1.1.1. $\text{Gr}_{2,m}(\mathbb{C})$ の元 $[z]$ が全正值であるとは, 任意の $1 \leq i < j \leq m$ について $P_{ij}(z')$ が正実数値で $[z'] = [z]$ となるような z' が存在することをいう.

この定義から結局, $[z]$ が全正值であることと $P_{ij}(z)$ の符号が全て同じであることが同値である. この全正值性を判定するためには単純に $m(m-1)/2$ 個の Plücker 座標を計算すれば良いが, 計算すべき Plücker 座標の個数を減らせないだろうか. そこで, まず Plücker 座標の間に成立する関係式に注目する. Plücker 座標の間には Grassmann-Plücker 関係式と呼ばれる次の関係式が成り立つことが知られている:

$$P_{ik}P_{jl} = P_{ij}P_{kl} + P_{il}P_{jk} \quad (1.1.1)$$

この関係は, 次のように解釈できる: 頂点に 1 から m までのラベルがついている縁に内接する m 角形を考える (図 1.1 は 6 角形). このとき, i と j を結ぶ直線の長さを P_{ij} とすれば, Ptolemy の定理

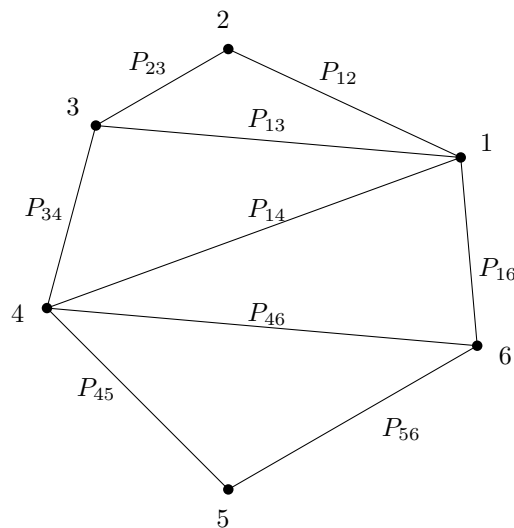


図 1.1 6 角形の三角形分割の一例

(円に内接する四角形の対角線の長さの積と対辺の長さの積の和が等しい) から (1.1.1) が成立している. この m 角形を観察すると, 適当な m 角形の三角形分割 T を与えることにより残りの P_{ij} が全て (1.1.1) を繰り返し用いることで求まり, さらにそれらは全て m 角形の辺と T に含まれる対角線の長さ P_{ij} の引き算を用いない分数の形で表されることがわかる. ここから, 次の定理が成り立つ.

定理 1.1.2 ([FZW16, Theorem 1.2.3]). $[z] \in \text{Gr}_{2,m}(\mathbb{C})$ について, m 角形の頂点に 1 から m のラベルをつけ, i と j を結ぶ辺または対角線に Plücker 座標 $P_{ij}(z)$ を対応させる. このとき, 三角形分割に対応する $m-3$ 個の Plücker 座標と m 角形の辺に対応する m 個の Plücker 座標がすべて正実数である, またはすべて負実数であるならば, $[z]$ は全正值である.

これにより, 実は $[z]$ が全正值かどうかを調べるには特定の $2m-3$ 個の Plücker 座標を調べれば

十分であることがわかる.

さらに, この m 角形の辺とある三角形分割を用いることで, 対応する Plücker 環の基底を構成することができる.

定理 1.1.3 ([KR84, Theorem 3.2]). 関係式 (1.1.1) を満たす P_{ij} によって生成される Plücker 環 $R_{2,m}$ について, 1 つの三角形分割と m 角形の辺に対応する $2m - 3$ 個の P_{ij} をとると, これらによる単項式は $R_{2,m}$ の基底となる.

1.1.2 団代数

以下では特別な場合における団代数, 特に籐を用いた形の団代数を定義する (より広い意味での団代数は 2.1 節で厳密に定義する). そして, この団代数における団変数, 交換関係式が前節に出てくる m 角形の対角線に付随する P_{ij} やこれらの間の関係式の一般化であるという事実をみていく. まず, 1 ループ, 2 サイクル (図 1.2) を含まない籐 (頂点が n 個であり矢が有限個の有向グラフ) を用意する. この籐を Q として, 各頂点に $1, \dots, n$ とラベルをつけることにする. さらに, このラベルに対応



図 1.2 1 ループ (左) と 2 サイクル (右)

して整数係数上の有理関数体の代数的独立な変数組 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ を与える. これを**団** (*cluster*), 個々の変数を**団変数** (*cluster variable*) という. この籐と団のペア (Q, \mathbf{x}) を**シード** (*seed*) と呼ぶ. このシードに対して, 任意の頂点 j に付随する変換 $\mu_j(Q, \mathbf{x}) = (Q', \mathbf{x}')$ を次のように与える.

まず, Q' を Q から次の操作によって得られる新しい籐とする.

- 1) j のラベルがついた頂点に出入りする矢を全て反転させる.
- 2) 続いて, $i \xrightarrow{s_{ij}} j \xrightarrow{s_{jk}} k$ なる部分籐について, 新しい矢 $k \xrightarrow{s_{ij}s_{ik}} i$ を追加する.
- 3) 2 サイクルをすべて取り除く.

ただし, s_{ij} は i から j への矢の本数を表しているものとする. さらに, $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ を次のように定める.

$i \neq j$ に対して $x'_i = x_i$, また $i = j$ のとき

$$x'_j = \frac{\prod_{i \rightarrow j} x_i^{s_{ij}} + \prod_{j \rightarrow k} x_k^{s_{jk}}}{x_j}. \quad (1.1.2)$$

ただし, j は, i から出てくる矢が存在する頂点, k は i に入っていく矢が存在する頂点とする. この操作を頂点 j における**変異** (*mutation*) と呼び, (1.1.2) を**交換関係式** (*exchange relation*) と呼ぶ (本論文第 2 章ではさらに一般的に定義する). さらに, ある籐とその団を 1 つ任意に固定し, そこから変異の繰り返すことで得られるすべての団に含まれる団変数全体の集合を \mathcal{A} としたとき, この \mathcal{A} により生成される n 変数有理関数体の部分環を**団代数** (*cluster algebra*) と呼ぶ.

実は変異の定義は先に見た m 角形の三角形分割とそれに付随する Grassmann-Plücker 関係式 (1.1.1) のある意味での一般化となっている. これを確認する. 図 1.1 の 6 角形の辺の長さを 1 とし, 三角形分割を形成する各対角線の長さについて形式的に $P_{13} = x_1, P_{14} = x_2, P_{46} = x_3$ と置きなおす (図 1.3 左). 一方で,

$$Q = 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad (1.1.3)$$

と置く. ここで, Q は x_i と x_j に対応する辺が反時計回り順に現れるとき, i から j に矢を一本追加する規則で定まっている. このとき, 例えば 6 角形の x_2 の長さが与えられている対角線を別の三角形分割を与えるように置き換える (この操作を **フリップ (flip)** という. 図 1.3 参照) と, 新しく得ら

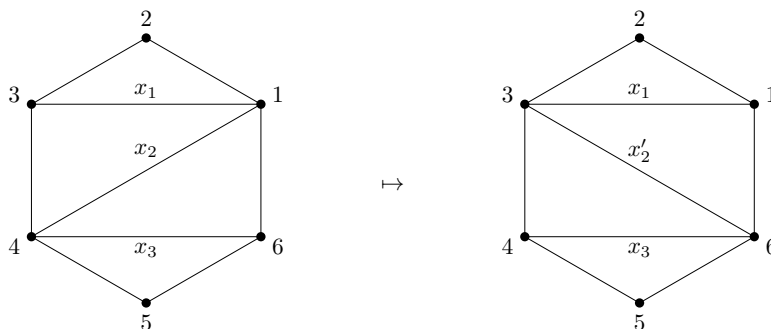


図 1.3 x_2 についてのフリップ

れた対角線の長さ x_2' は (1.1.1) を用いて

$$x_2' = \frac{x_1 + x_3}{x_2} \quad (1.1.4)$$

と与えられるが, これはちょうど (1.1.3) を頂点 2 について変異したときの x_2' に等しい. 実際,

$$\mu_2(1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3, (x_1, x_2, x_3)) = \left(1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3, \left(x_1, \frac{x_1 + x_3}{x_2}, x_3 \right) \right) \quad (1.1.5)$$

となる. 頂点 1 や 3 で変異した時も同様である. すなわち, 図 1.1 における三角形分割は, 辺の長さを正規化したときちょうど (1.1.3) における籓と団に対応しており, さらに Plücker 変換 (1.1.1) はちょうど (1.1.3) の変異における交換関係式 (1.1.2) に一致している (このようなフリップと変異の対応は本論文 2.4 節でより一般的な形で与える). また, 定理 1.1.3 により与えられる正 6 角形の三角形分割に対応する Plücker 環 $R_{2,6}$ (6 角形の辺に対応する変数は 1 であることに注意) の基底は, (1.1.3) から得られる団代数の元となっていることがわかる.

1.1.3 団代数の数論への応用

このように, 全正值性の問題で現れた関係式が団や変異といった概念により一般化されて団代数という分野が発展してきたのであるが, この一般化によって, 団代数は当初の目的である全正值性の研究以外にも応用が行われるようになった. ここでは, 数論への応用例を見てみよう.

Somos k 数列とよばれる, Michael Somos の論文 [Som89] によって 1980 年代に導入された数列を考える. これは以下の漸化式で与えられる数列である: 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$s_{n+k}s_n = \sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \alpha_i s_{n+k-1} s_{n+i}. \tag{1.1.6}$$

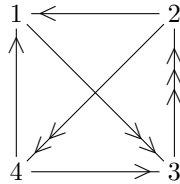
ただし, $\lfloor n \rfloor$ は n を超えない最大の整数である. この数列の, 特に $k = 4$ の場合について考える. この数列は楕円曲線に関連を持つことが知られている. この数列について, 次の定理が成立する:

定理 1.1.4 ([Mal92, Theorem 1]). Somos 4 数列について, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ のとき, すなわち

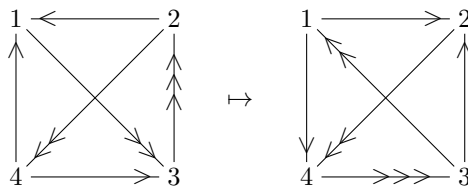
$$s_{n+4}s_n = s_{n+3}s_{n+1} + s_{n+2}^2 \tag{1.1.7}$$

を考える. $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$ のとき, 任意の n に対して $s_n \in \mathbb{Z}$ である.

この定理は Malouf によって 1992 年に初等的に解決されているが, 団代数を用いる別証明が [FZ02b] で与えられている. これを説明しよう. 次のような籐を考える:



ここで, $>$ の数は矢の本数を表すものとする. さらに, これに付随する団 (x_1, \dots, x_4) を考える. これを頂点 1 について変異すると,



$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \left(x_5 = \frac{x_4 x_2 + x_3^2}{x_1}, x_2, x_3, x_4 \right)$$

となり, 籐は変異前のものを時計回りに 90 度回転したものになっていることがわかる. また, x_1 から変異した団変数 x_5 は (1.1.7) において $s_i = x_i, i = 1$ としたものを満たしている. よって, この状態から続けて 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, ... と変異を行うことで順番に (1.1.7) の s_i を x_i とした式を満たす x_5, x_6, x_7, \dots を得ることができる. ここで, 団変数には次の性質が成り立つ:

定理 1.1.5. 任意の $(Q, \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n))$ をとる. (Q, \mathbf{x}) から変異を繰り返して得たシードに含まれる任意の団変数を x_1, \dots, x_n の有理関数で表したとき, その分母は x_1, \dots, x_n の単項式となる. すなわち, 任意の団変数は x_1, \dots, x_n のローラン多項式として表される.

この定理は本論文定理 2.1.10 の特殊な場合である. これを **ローラン現象** (*Laurent phenomenon*) という. この定理により, 定理 1.1.4 が直ちに従うことがわかる.

このように, 団代数の, 特に団変数と変異に関する応用は当初の動機の枠を超えた分野で行われている. ここでは詳細を割愛するが, 他にも完全 WKB 解析 [IN14], 双曲幾何 [FST08, FG09], 多元環の表現論 [BMR⁺06] など, その応用は多岐にわたっている.

1.2 研究概要と論文構成

ここからは、この論文の主題と結果について述べる。[FZ07]により、団代数に付随する概念として C 行列、 G 行列、 F 多項式と呼ばれる2つの行列族と1つの多項式族が導入された。これらは主係数と呼ばれるトロピカル演算の入った半体による群環を係数に持つような団代数に定義される概念であり、 C 行列は係数の指数に関する情報を、 G 行列は団変数の次数に関する情報を持つ行列である。また、 F 多項式はこの団変数の初期変数表示において変数 x_i に1を代入した、いわば団変数の骨格に相当するものである。 C 行列、 G 行列、 F 多項式の特筆すべき点は、[FZ07]によって与えられた分離公式(命題 2.3.6, 2.3.5)により、(係数環がトロピカル演算の入った半体とは限らない)団変数や係数の表示を記述できるという点である。これにより、これら C 行列、 G 行列、 F 多項式の性質を調べることが団代数の変異を研究する1つのアプローチとなった。団変数や係数の変異の代わりに C 行列、 G 行列、 F 多項式を調べることによる利点は、主に C 行列と G 行列について、その性質を線形代数と行列の道具、すなわち行列式、転置、トレース、固有値などを使って調べることができる点である。それを活用した例として、 C 行列と G 行列の双対性を示した[NZ12]、 C 行列のシードに関する一意性を示した[CHL17]などが挙げられる。一方で、 F 多項式は団変数の初期変数表示による煩雑さをそのまま引き継いでいるので、そのままの形では扱いづらいと著者は考えた。そこで、著者は一つの団に含まれる n 個の F 多項式の最高次数で定義される F 行列という、 C 行列や G 行列と同じサイズの行列を定義し、 F 行列と C 行列や G 行列の関係式を調べることで F 多項式の性質を解き明かしていくことを考えた。この論文は、その結果を述べたものである。

この論文の主結果は2つある。まず1つ目は、以下の定理である。この定理は、藤原祥吾と著者の共同研究[FG18]によるものである。

定理 A (定理 3.3.6). F 行列は自己双対性を持つ。

2つ目は、以下の定理である。こちらは、百合草寿哉と著者の共同研究[GY]によるものである。

定理 B (定理 4.2.6). 点付曲面から誘導されるクラスの団代数において、団に付随する F 行列から団に含まれる n 個の F 多項式は一意的に決まり、さらに具体的な復元公式が与えられる。

F 行列の厳密な定義とこれらの定理の正確な内容、証明は後の章で述べることにして、ここではその概要を説明することにする。

まず定理 A について説明しよう。先行研究として、[NZ12]による C 行列と G 行列の双対定理(式 (3.2.21))が与えられている。これは、通常の変異と、後方変異と呼ばれる変換の間に成立する C 行列と G 行列の双対性であるが、この類似として、 F 行列の間にも同様の式が成立するというものである。 F 多項式の形では見えにくい性質が、最高次数のみに着目することで顕在化する好例である。

次に定理 B について説明する。 F 行列は F 多項式から定義されるものであるからシード中の n 個の F 多項式から F 行列は一意的に定まるのは当然であるが、ではその逆は成立するかという問題を考える。定理 B は、その限定的解決である。 F 行列から F 多項式が決定されることは、すなわち C 行列、 G 行列、 F 行列から団と変数が決定されることを意味するので、 F 行列の重要性が保証される。現在未解決であるが、著者は点付曲面から誘導されるものではない一般の団代数においても同様の定理が成り立つと予想している：

予想 1.2.1. 任意の団代数において、団に含まれる n 個の F 多項式は、団に付随する F 行列によって一意的に決まる。

最後にこの論文の構成について説明する。第 2 章でまず団代数について、後の章に即する形で基本事項をまとめる。次に、第 3 章で C 行列と G 行列の双対性と、 F 行列の双対性について変異と後方変異の双対性の観点から記述し、最後に定理 A の証明を与える。第 4 章では、点付曲面において F 行列から F 多項式を復元する方法について論じ、定理 B の証明を与える。付録 A では、第 4 章の定理 4.3.4 の証明中で省略した詳細な計算部分を補完している。なお本稿において、第 2 章の内容は全て少人数クラスにおいて学習した内容のサーベイである。第 3 章と第 4 章は、著者の自主研究の結果を記述している。第 3 章は藤原祥吾、第 4 章は百合草寿哉との共同研究によるオリジナルの結果である。

第 2 章

団代数の概要

この章では、第 3 章、第 4 章で言及する内容に関連する団代数の基本的な内容について、[FZ07] と [FST08] に沿った形でまとめる。

2.1 団代数の定義

この節では、[FZ07] に基づき団代数を定義する。 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ を任意にとり固定しておく。準備として、最初に半体と呼ばれる代数構造を導入する。半体 (semifield) とは、可換な乗法 \cdot による群で、可換で結合的であり、乗法について分配的な加法 \oplus を備えるものである。以下に重要な例を挙げる。

例 2.1.1 ([FZ07, Definition 2.1]). $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ を u_1, u_2, \dots, u_ℓ を変数とする有理関数で、引き算なしの表示を持つもの全体を表すとする (たとえば、 $u^2 - u + 1$ には演算として差をとる部分が存在しているが、 $u^2 - u + 1 = \frac{u^3+1}{u+1}$ なので引き算なし表示を持つ有理関数である)。このとき、 $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ は通常の積と和について半体となる。これを、**普遍的半体** (universal semifield) という。

$\mathbb{Q}_{\text{sf}}(u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ は次の意味で普遍的である。

定理 2.1.2 ([BFZ96, Lemma 2.1.6]). 任意の半体 \mathbb{P} とその元の部分集合 $\{t_1, t_2, \dots, t_\ell\}$ をとる。このとき、 u_1, \dots, u_ℓ をそれぞれ t_1, t_2, \dots, t_ℓ へ対応させるような写像 $\varphi : \{u_1, u_2, \dots, u_\ell\} \rightarrow \{t_1, t_2, \dots, t_\ell\}$ を考えると、これを半体準同型 $\varphi : \mathbb{Q}_{\text{sf}}(u_1, u_2, \dots, u_\ell) \rightarrow \mathbb{P}$ に一意的に拡張できる。

証明. 一意性は明らかである。存在を示す。 φ の和と積への拡張はそれぞれ演算を保つように定める。あとはこの写像 φ が well-defined であることを確かめればよい。すなわち、

$$\frac{P_1(u_1, \dots, u_\ell)}{Q_1(u_1, \dots, u_\ell)} = \frac{P_2(u_1, \dots, u_\ell)}{Q_2(u_1, \dots, u_\ell)} \quad (2.1.1)$$

が成立しているとき、

$$\frac{P_1(t_1, \dots, t_\ell)}{Q_1(t_1, \dots, t_\ell)} = \frac{P_2(t_1, \dots, t_\ell)}{Q_2(t_1, \dots, t_\ell)} \quad (2.1.2)$$

が成立していることを示せば十分である。ここで、(2.1.1) より

$$P_1(u_1, \dots, u_\ell)Q_2(u_1, \dots, u_\ell) = P_2(u_1, \dots, u_\ell)Q_1(u_1, \dots, u_\ell) \quad (2.1.3)$$

が成立しているので、両辺に φ を作用させることにより

$$P_1(t_1, \dots, t_\ell)Q_2(t_1, \dots, t_\ell) = P_2(t_1, \dots, t_\ell)Q_1(t_1, \dots, t_\ell) \quad (2.1.4)$$

を得る。両辺を $Q_1(t_1, \dots, t_\ell), Q_2(t_1, \dots, t_\ell)$ で割ることにより (2.1.2) を得る。□

すなわち、 $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ において成立する引き算なしの恒等式は、 \mathbb{P} においても u_i を t_i に置き換えることで同様に成立する。もう 1 つ重要な例を挙げておく。

例 2.1.3 ([FZ07, Definition 2.2]). $\text{Trop}(u_1, \dots, u_n)$ を、積に関して $\{u_1, \dots, u_n\}$ で自由生成される可換群で、次で定まる加法 \oplus を持つものとする。

$$\prod u_j^{a_j} \oplus \prod u_j^{b_j} = \prod u_j^{\min(a_j, b_j)}. \quad (2.1.5)$$

このとき、 $\text{Trop}(u_1, \dots, u_n)$ を**トロピカル半体** (*tropical semifield*) と呼ぶ。

このような和と積によって定まる構造の重要性についての説明は 2.2 節以降に譲ることにする。次に団代数の基本概念であるシードを定義する準備をしよう。 $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ を半体 \mathbb{P} で生成される \mathbb{Z} 上の群環であるとする。 $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ は整域だから、全商環は体である。これを $\mathbb{Q}(\mathbb{P})$ と表すことにする。体 \mathcal{F} として $\mathbb{Q}(\mathbb{P})$ 上の n 変数有理関数体と同型なものを 1 つ選ぶ。この \mathcal{F} を以下で定める団代数 \mathcal{A} の**周辺体** (*ambient field*) という。

定義 2.1.4 ([FZ07, Definition 2.3]). 任意に半体 \mathbb{P} を固定して、 \mathcal{F} をその周辺体とする。 \mathcal{F} の**ラベル付シード** (*labeled seed*) を、次の条件を満たす三つ組 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ として定義する。

- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ は \mathcal{F} の自由生成集合となる代数的独立な n 個の変数の組である。
- $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ は \mathbb{P} の n 個の元の組である。
- $B = (b_{ij})$ は歪対称化可能な $n \times n$ 整数行列である。ここで、行列 B が歪対称化可能であるとは、ある正整数成分対角行列 S (これを B の歪対称化行列という) が存在して SB が歪対称行列となることをいう。

\mathbf{x} を (ラベル付の) **団** (*cluster*), \mathbf{y} を**係数組** (*coefficient tuple*), B を**交換行列** (*exchange matrix*) とそれぞれ呼ぶ。

この論文全体を通して、 $[b]_+ = \max(b, 0)$ と定めておく。

定義 2.1.5 ([FZ07, Definition 2.4]). $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ を \mathcal{F} のラベル付けされた \mathbb{P} に係数を持つシードとして、 $\ell \in \{1, \dots, n\}$ を任意にとる。 ℓ 方向の**シード変異** (seed mutation) μ_ℓ によって $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ が次で定義される $\mu_\ell(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\mathbf{x}', \mathbf{y}', B')$ に移るものとする。

- $B' = (b'_{ij})$ の成分は

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & (i = \ell \text{ または } j = \ell); \\ b_{ij} + [-b_{i\ell}]_+ b_{\ell j} + b_{i\ell} [b_{\ell j}]_+ & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (2.1.6)$$

で定義される。

- $\mathbf{y}' = (y'_1, \dots, y'_n)$ は

$$y'_j = \begin{cases} y_\ell^{-1} & (j = \ell); \\ y_j y_\ell^{[b_{\ell j}]_+} (y_\ell \oplus 1)^{-b_{\ell j}} & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (2.1.7)$$

で定義される.

- $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ は $j \neq \ell$ のとき $x'_j = x_j$ と定義され. $x'_\ell \in \mathcal{F}$ は**交換関係式** (*exchange relation*)

$$x'_\ell = \frac{y_\ell \prod x_i^{[b_{i\ell}]_+} + \prod x_i^{-[b_{i\ell}]_+}}{(y_\ell \oplus 1)x_\ell} \quad (2.1.8)$$

によって定義される.

注 2.1.6. (2.1.6) は様々な表し方が存在する. たとえば,

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & (i = \ell \text{ または } j = \ell); \\ b_{ij} + b_{i\ell}[-b_{\ell j}]_+ + [b_{i\ell}]_+ b_{\ell j} & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (2.1.9)$$

や, (2.1.9) の $[\]_+$ 内の符号を入れ替えた

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & (i = \ell \text{ または } j = \ell); \\ b_{ij} + b_{i\ell}[b_{\ell j}]_+ + [-b_{i\ell}]_+ b_{\ell j} & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (2.1.10)$$

も同値な式である.

注 2.1.7. このシードの定義は, 1.1.2 節で与えた籐と変数の組で与えたシードの定義の一般化である. B が歪対称行列のとき, (i, j) 成分 b_{ij} を籐 Q の i から j への矢の本数 (b_{ij} が負の値のときは j から i へ矢が出ていると考える) に対応させることで, 交換行列の変換 (2.1.6) と籐の Q から Q' への変換が一致する. 1.1.2 節で考えたシードは $\mathbb{P} = \{1\}$ の場合に相当する.

μ_ℓ は対合である, すなわち, $\mu_\ell \circ \mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ が成立することが直接計算によって確かめられる. また, $\mu_\ell(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\mathbf{x}', \mathbf{y}', B')$ がシードとなることがわかる. 実際, \mathbf{x}' が代数的独立であることは背理法から直ちに従う. また, 直接計算から B' が歪対称化可能であり, しかも歪対称化行列 S は変異前の B と共通であることが示される.

次に, \mathbb{T}_n を任意の頂点から n 本の辺が伸びており, その各辺に $1, \dots, n$ でラベル付けされるグラフであるとする. ここで, 1つの頂点から出る n 本の辺には全て違うラベルがついているようにする. このグラフ \mathbb{T}_n のことを n -**正則木** (*n-regular tree*) と呼ぶ. $t, t' \in \mathbb{T}_n$ が ℓ でラベル付けされた辺で繋がっているとき, $t \xrightarrow{\ell} t'$ のように表すものとする.

定義 2.1.8 ([FZ07, Definition 2.9]). \mathbb{T}_n と団全体の間の \mathbb{P} に係数を持つ**団パターン** (*cluster pattern*) を, 任意の $t \xrightarrow{\ell} t'$ を満たす \mathbb{T} の頂点 t, t' に対して, ラベル付けされたシード $\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t), \Sigma_{t'} = (\mathbf{x}'_{t'}, \mathbf{y}_{t'}, B_{t'})$ を互いに ℓ 方向のシード変異で移り合うような \mathbb{T}_n の頂点と団の間の対応と定義する. また, Σ_t の元を以下のように表すことにする.

$$\mathbf{x}_t = (x_{1;t}, \dots, x_{n;t}), \mathbf{y}_t = (y_{1;t}, \dots, y_{n;t}), B_t = (b_{ij;t}). \quad (2.1.11)$$

この定義は, シード変異が対合であることにより well-defined となる. これにより, 各シードとその間の関係式による結びつきが, グラフの頂点と辺という形で可視化される. 以上で団代数を定義する準備が整った.

定義 2.1.9 ([FZ07, Definition 2.11]). 任意に団パターンが与えられたとき,

$$\mathcal{X} = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} \mathbf{x}_t = \{x_{i;t} : t \in \mathbb{T}_n, 1 \leq i \leq n\}, \quad (2.1.12)$$

を団パターンに現れる全てのシードの和集合として定める. ここで, $x_{i;t}$ を**団変数** (*cluster variable*) と呼ぶことにする. さらに, 与えられた団パターンに付随する団代数 \mathcal{A} を全ての団変数で生成される \mathcal{F} の $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ 部分代数, すなわち $\mathcal{A} = \mathbb{Z}\mathbb{P}[\mathcal{X}]$ と定義する.

実は団代数について以下の重要な性質が成立している.

定理 2.1.10 ([FZ02a, Theorem 3.1]). $t \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ に付随する団代数 \mathcal{A} はローラン多項式環 $\mathbb{Z}\mathbb{P}[\mathbf{x}^{\pm 1}]$ に含まれる. すなわち, \mathcal{A} の元は全て \mathbf{x} の団変数の $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ 上ローラン多項式である.

この定理は [FZ02a] の主定理であり, 証明は帰納法を用いた初等的なものであるが, 紙数を多く割く必要があるのでここでは省略する. この性質は, **ローラン現象** (*Laurent phenomenon*) と呼ばれる, 団パターンがもつ大きな特徴の1つである. この性質を用いることができるということが, 他の数学分野において団代数の考え方を導入する大きな利点となる.

2.2 主係数を持つ団パターン

ここからは, 団代数を決定する団パターンとその変異の性質に絞って話を進める. 以下, 団パターン \mathbb{T}_n が出てきたときはその中から任意に頂点 t_0 を選び, これを初期頂点とすることとする.

定義 2.2.1 ([FZ07, Definition 3.1]). \mathbb{P} を係数を持つ団パターン $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ について, $\mathbb{P} = \text{Trop}(\mathbf{y})$ かつ $\mathbf{y}_{t_0} = (\mathbf{y})$ であるとき, **主係数** (*principal coefficients*) を初期頂点 t_0 において持つといい, この団パターンを $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)^*$ で表すとする.

以降, 初期頂点 $t_0 \in \mathbb{T}_n$ に付随するシードを

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{t_0} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = \mathbf{y}_{t_0} = (y_1, \dots, y_n), B = B_{t_0} = (b_{ij}) \quad (2.2.1)$$

と表すことにする.

定義 2.2.2 ([FZ07, Definition 3.3]). $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)^*$ を t_0 で主係数を持つ団パターンとする. 交換関係式の定義式より, 全ての団変数 $x_{\ell;t}$ は \mathbf{x}, \mathbf{y} を変数とする (一意的な) 引き算なしの有理関数として表すことができる. そこでこの有理関数を

$$X_{\ell;t}^{B;t_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.2.2)$$

と定義する. また, $F_{\ell;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}) \in \mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y})$ を $X_{\ell;t}^{B;t_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ の各 x_j に 1 を代入した有理関数とする. すなわち,

$$F_{\ell;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}) = X_{\ell;t}^{B;t_0}(1, \dots, 1, \mathbf{y}). \quad (2.2.3)$$

この $F_{\ell;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ の構造を知る上で重要な定理がある.

定理 2.2.3 ([FZ07, Theorem 3.5]). $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)^*$ を t_0 で主係数を持つ団パターンとする. このとき, 任意の団変数 $x_{i;t}$ は, \mathbf{x} を変数とし \mathbf{y} の整数多項式を係数とするローラン多項式で表される:

$$X_{\ell;t}^{B;t_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}^{\pm 1}, \mathbf{y}], F_{\ell;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{y}]. \quad (2.2.4)$$

この定理を示すために次の補題を用意する (この補題の証明は省略):

補題 2.2.4 ([FZ03, Lemma 5.2]). P と Q がそれぞれ 0 でない定数項 a, b を持つ整域 S 上のローラン多項式であるとき, P/Q が S 上のローラン多項式ならば, P/Q は実際は定数項 a/b を持つ S 上の多項式である.

定理 2.2.3 の証明. (2.2.4) の前半の式を示せば十分である. 定理 2.1.10 より, $X_{\ell;t}^{B;t_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が \mathbf{x}, \mathbf{y} のローラン多項式であることはよい. よって, 示すべきは任意の y_i が分母に含まれないことである. そのためには, 関数 $X_{\ell;t}^{B;t_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を変数 y_i についての $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$ 係数関数としてみたときに, これが多項式関数であることを示せばよい. $d(x_{\ell;t}, \mathbf{x})$ を \mathbb{T}_n 上の \mathbf{x} から $x_{\ell;t}$ までの最短距離を与える関数とする. $d(x_{\ell;t}, \mathbf{x})$ による帰納法を用いて, 定理をさらに強めた次の主張を証明する:

- $X_{\ell;t}^{B;t_0}(y_i)$ は定数項が引き算なしの表示を持つ有理関数である (特に, $X_{\ell;t}^{B;t_0}(0) \neq 0$ である).

$d(x_{\ell;t}, \mathbf{x}) = 0$ のときは明らか. $d(x_{\ell;t}, \mathbf{x}) > 0$ のとき, 距離の定義から $x_{\ell;t}$ 以外の全ての団変数 $x_{i;s}$ について $d(x_{i;s}, \mathbf{x}) < d(x_{\ell;t}, \mathbf{x})$ となるような交換関係式

$$x_{\ell;t} = \frac{y_{\ell;s} \prod x_{i;s}^{[b_{i\ell;s}]_+} + \prod x_{i;s}^{-[b_{i\ell;s}]_+}}{(y_{\ell;s} \oplus 1)x_{\ell;s}} \quad (2.2.5)$$

が存在する. このとき, 帰納法の仮定と, \oplus を $\text{Trop}(\mathbf{y})$ の和としてみた場合 y_i が (2.2.5) の右辺の分母に存在せず, かつ分子の 2 つある項のどちらか一方にしか含まれないという事実 ($y_{\ell;s}$ は y_1, \dots, y_n の単項式であることに注意) から, 補題 2.2.4 を適用することにより $x_{\ell;t}$ が主張を満たす. \square

この定理は定理 2.1.10 を少し強めたものであり, これにより $F_{\ell;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ は y_1, \dots, y_n の多項式なので F 多項式 (F -polynomial) と呼ぶことにする. この F 多項式は次に定義する C 行列, G 行列と並んで団パターンの構造を決定する上で重要な概念である.

次に C 行列を定義する. $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)^*$ を t_0 で主係数を持つ団パターンとする. このとき, $y_{j;t}$ は (y_1, \dots, y_n) たちの単項式である. これを $y_{j;t} = \prod_{i=1}^n y_i^{c_{ij;t}}$ と書くことにする. また, $t \xrightarrow{\ell} t'$ を仮定すると (2.1.7) により任意の i について次が成立する.

$$c_{ij;t'} = \begin{cases} -c_{i\ell;t} & (j = \ell); \\ c_{ij;t} + c_{i\ell;t}[b_{\ell j;t}]_+ + [-c_{i\ell;t}]_+ b_{\ell j;t} & (\text{それ以外}). \end{cases} \quad (2.2.6)$$

よって, $c_{ij;t} = b_{ij;t}$, $c_{ij;t'} = b_{ij;t'}$ とおくことで $\tilde{B}_t = (b_{ij;t})$ と $\tilde{B}_{t'} = (b_{ij;t'})$ (ただし $(1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq n)$ の間には注 2.1.6 の (2.1.10), さらにそれと同値な行列交換関係式 (2.1.6) が成立する. (これがトロピカル半体を重要たらしめている要素の 1 つである). そこで, この行列 $\tilde{B}_t = (b_{ij;t})$ を **拡大交換行列** (*extended exchange matrix*) と呼ぶことにする ([FZ07, Remark 3.2], [FZ02a, Corollary 5.9] も参照).

定義 2.2.5. $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)^*$ を t_0 で主係数を持つ団パターンとする. $C_t^{B;t_0}$ を $(c_{ij;t})$, すなわち拡大交換行列 \tilde{B}_t の下の $n \times n$ 部分行列を表すものとし, これを \mathcal{A} の t における C 行列 (C -matrix) とする. $\mathbf{c}_{i;t}^{B;t_0}$ で $C_t^{B;t_0}$ の第 i 列を表すこととし, これを Σ_t の i 番目の \mathbf{c} ベクトル (\mathbf{c} -vector) と呼ぶ.

注 2.2.6. (2.2.6) の別の表し方として, 注 2.1.6 の (2.1.9) に対応する

$$c_{ij;t'} = \begin{cases} -c_{i\ell;t} & (j = \ell); \\ c_{ij;t} + c_{i\ell;t}[-b_{\ell j;t}]_+ + [c_{i\ell;t}]_+ b_{\ell j;t} & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (2.2.7)$$

が存在する.

また, この C 行列と団変数の変異 (2.1.8) を用いることにより, F 多項式は $t \xrightarrow{\ell} t'$ に対して漸化式

$$F_{i;t'}^{B;t_0}(\mathbf{y}) = \begin{cases} F_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}) & (i \neq \ell); \\ \frac{\prod_{k=1}^n y_k^{[c_{k\ell;t}]_+} \prod_{k=1}^n (F_{k;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}))^{[b_{k\ell;t}]_+} + \prod_{k=1}^n y_k^{[-c_{k\ell;t}]_+} \prod_{k=1}^n (F_{k;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}))^{[-b_{k\ell;t}]_+}}{F_{\ell;t}(\mathbf{y})} & (i = \ell) \end{cases} \quad (2.2.8)$$

が成立することに注意しておく ([FZ07, Proposition 5.1] も参照).

次に, G 行列を定義する. そのために, 団変数が斉次多項式となるようなローラン多項式上の次数を導入する.

定理 2.2.7 ([FZ07, Corollary 6.2]). $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)^*$ を t_0 で主係数を持つ団パターンとする.

$$\deg(x_i) = \mathbf{e}_i, \quad \deg(y_j) = -\mathbf{b}_j \quad (2.2.9)$$

(ただし, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は \mathbb{Z}^n の標準基底, \mathbf{b}_j は B の第 j 列ベクトルとする) により与えられる \mathbb{Z}^n -次数において団パターン $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ の全ての団変数は斉次ローラン多項式である.

この定理の証明は 2.3 節で行う. これにより, $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B)$ における $x_{i;t}$ の次数をその斉次ローラン多項式の次数で定義する.

定義 2.2.8. $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)^*$ を t_0 で主係数を持つ団パターンとする. $\mathbf{g}_{i;t}^{B;t_0}$ を $x_{i;t}$ の次数とし, これを Σ_t の i 番目の \mathbf{g} ベクトル (\mathbf{g} -vector) と定義する. さらに, $G_t^{B;t_0} = (g_{ij;t})$ を $(\mathbf{g}_{1;t}^{B;t_0}, \dots, \mathbf{g}_{n;t}^{B;t_0})$ で定義し, これを G 行列 (G -matrix) と呼ぶ.

G 行列についても C 行列と同様に隣接頂点間の漸化式を定めることができる. $t \xrightarrow{\ell} t'$ を仮定すると (2.1.8) の右辺第 1 項の次数を用いて直接計算することで, 任意の i について次が成立することがわかる ([FZ07, Proposition 6.6] も参照);

$$g_{ij;t'} = \begin{cases} g_{ij;t} & (j \neq \ell); \\ -g_{i\ell;t} + \sum_{k=1}^n g_{ik;t} [b_{k\ell;t}]_+ - \sum_{k=1}^n b_{ik} [c_{k\ell;t}]_+ & (j = \ell). \end{cases} \quad (2.2.10)$$

また, 次数として (2.1.8) の右辺第 2 項の値を用いることで

$$g_{ij;t'} = \begin{cases} g_{ij;t} & (j \neq \ell); \\ -g_{i\ell;t} + \sum_{\ell=1}^n g_{i\ell;t} [-b_{\ell k;t}]_+ - \sum_{\ell=1}^n b_{i\ell} [-c_{\ell k;t}]_+ & (j = \ell) \end{cases} \quad (2.2.11)$$

とも表される。

注 2.2.9. C, G 行列, F 多項式の漸化式はそれらの性質として与えられたが, 逆に初期シード t_0 に付随する F 多項式, C, G 行列を

$$F_{i;t_0}^{B;t_0}(\mathbf{y}) = 1 \ (i \in \{1, \dots, n\}), \ C_t^{B;t_0} = G_t^{B;t_0} = I$$

(I は単位行列) と定め, それ以外の頂点に付随する F 多項式, C, G 行列を $t \xrightarrow{\ell} t'$ に対して $F_{i;t'}^{B;t_0}(\mathbf{y}), C_{t'}^{B;t_0}, G_{t'}^{B;t_0}$ はそれぞれ (2.2.8), (2.2.6), (2.2.10) を満たす行列, という形で漸次的に定義してもよい。

この節で紹介した 2 つの行列族と 1 つの多項式族の重要性は, これらが任意の係数を持つ団パターンの完全に構造を決定するという点にある。それを次の節でみていく。

2.3 分離公式

この節では, 分離公式という基本的な定理とその系により, 団パターンの構造が先に定義した交換行列, C 行列, G 行列, F 多項式の 4 つで一意的に定まることをみる。証明を後回しにしていた定理 2.2.7 もこの定理の系として導かれる。まず, 分離公式を述べるために記号の整理をする。 F を引き算なしの表示を持つ \mathbb{Q} 上の有理多項式, \mathbb{P} を半体, u_1, \dots, u_n を \mathbb{P} の元とする。このとき, 多項式 F の変数として u_1, \dots, u_n を代入し, 多項式中の和, 積に \mathbb{P} の和, 積を適用したものを $F|_{\mathbb{P}}(u_1, \dots, u_n)$ と表すことにする。また, X を引き算なしの表示を持つ \mathbb{Q} 上の有理多項式, \mathcal{F} を体, u_1, \dots, u_n を \mathcal{F} の元とする。このとき, 記号の濫用であるが, X の変数として u_1, \dots, u_n を代入し, 多項式中の和, 積に \mathcal{F} の和, 積を適用したものを $X|_{\mathcal{F}}(u_1, \dots, u_n)$ と表す。

定理 2.3.1 ([FZ07, Theorem 3.7]). $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ を t_0 を初期頂点とする任意の団パターンとする。このとき, 団変数 $x_{i;t}$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) は次のように表される:

$$x_{i;t} = \frac{X_{i;t}^{B;t_0}|_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{F_{i;t}^{B;t_0}|_{\mathbb{P}}(\mathbf{y})}. \quad (2.3.1)$$

この定理の式 (2.3.1) が分離公式と呼ばれるものである。名前の由来は, 用いられている加法が分子では \mathcal{F} で定義されている形式和の $+$ のみ, 分母では \mathbb{P} で定義されている \oplus のみと完全に分離している点にある。まずは, この定理を示す。そのために, いくつか準備をしておく。

命題 2.3.2 ([FZ07, Proposition 3.9]). 任意に団パターン $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ をとる。任意の $t \in \mathbb{T}_n$ に対し, $\hat{\mathbf{y}}_t = (\hat{y}_{1;t}, \dots, \hat{y}_{n;t})$ を

$$\hat{y}_{j;t} = y_{j;t} \prod_i x_{i;t}^{b_{ij;t}}. \quad (2.3.2)$$

で定義する。このとき, $t \xrightarrow{\ell} t'$ に対して (2.1.7) と同様の式

$$\hat{y}_{j;t'} = \begin{cases} \hat{y}_{\ell;t}^{-1} & (j = \ell); \\ \hat{y}_{j;t} \hat{y}_{\ell;t}^{[b_{\ell j;t}]_+} (\hat{y}_{\ell;t} + 1)^{-b_{\ell j;t}} & (j \neq \ell). \end{cases} \quad (2.3.3)$$

が成立する。

証明. 簡単のため、記号を

$$x_i = x_{i;t}, \quad x'_i = x_{i;t'}, \quad y_i = y_{i;t}, \quad y'_i = y_{i;t'}, \quad b_{ij} = b_{ij;t}, \quad b'_{ij} = b_{ij;t'} \quad (2.3.4)$$

としておく。さらにこれに合わせる形で

$$\hat{y}_j = \hat{y}_{j,t}, \quad \hat{y}'_j = \hat{y}_{j,t'}. \quad (2.3.5)$$

と定める。このとき、まず

$$\hat{y}'_\ell = y'_\ell \prod_{i \neq \ell} x_i^{b'_{i\ell}} = y_\ell^{-1} \prod_{i \neq \ell} x_i^{-b_{i\ell}} = \hat{y}_\ell^{-1},$$

が成立する。これは、(2.3.3) の上の等式に他ならない。次に下の等式を示す。まず、(2.1.8) を次のように書き直す：

$$x'_\ell = \frac{\hat{y}_\ell + 1}{y_\ell \oplus 1} x_\ell^{-1} \prod_i x_i^{[-b_{i\ell}]_+}. \quad (2.3.6)$$

これを用いると、任意の $j \neq \ell$ に対して

$$\hat{y}'_j = y'_j (x'_\ell)^{-b_{\ell j}} \prod_{i \neq \ell} x_i^{b'_{ij}} = y_j y_\ell^{[b_{\ell j}]_+} (\hat{y}_\ell + 1)^{-b_{\ell j}} x_\ell^{b_{\ell j}} \prod_{i \neq \ell} x_i^{b'_{ij} - [-b_{i\ell}]_+ + b_{\ell j}}.$$

を得る。これに (2.1.6) を適用することで

$$\hat{y}'_j = (y_j \prod_{i \neq j} x_i^{b_{ij}}) (y_\ell \prod_{i \neq \ell} x_i^{b_{i\ell}})^{[b_{\ell j}]_+} (\hat{y}_\ell + 1)^{-b_{\ell j}} = \hat{y}_j \hat{y}_\ell^{[b_{\ell j}]_+} (\hat{y}_\ell + 1)^{-b_{\ell j}},$$

を得る。 □

以降の命題で用いる、定義 2.2.1 の $X_{i;t}^{B;t_0}$ に対応する係数の有理関数表示記号を定める。

定義 2.3.3. $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ を初期頂点が t_0 、半体が $\mathbb{P} = \mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y})$ であるような団パターンとする。このとき、係数組の元 $y_{j;t}$ を

$$Y_{j;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}) \in \mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y}) \quad (2.3.7)$$

と定義する。

(2.3.2) では元の係数の関係式 (2.1.7) における \oplus は \mathcal{F} 上の形式和になっている。よってこのとき、 \mathbb{Q}_{sf} の普遍性から任意の半体 \mathbb{P} 上における係数組の元は

$$y_{j;t} = Y_{j;t}^{B;t_0}|_{\mathbb{P}}(\mathbf{y}). \quad (2.3.8)$$

で表される。特に、命題 2.3.2 から

$$\hat{y}_{j;t} = Y_{j;t}^{B;t_0}|_{\mathcal{F}}(\hat{\mathbf{y}}), \quad (2.3.9)$$

が成立する。ただし、 $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$ とする。有理関数 $Y_{j;t}^{B;t_0}$ は F 多項式を用いて次のように表される：

命題 2.3.4 ([FZ07, Proposition 3.12]). 任意の $B_t = (b_{ij;t})$ と $t \xrightarrow{\ell} t'$ に対して

$$F_{\ell;t'}^{B;t_0}(\mathbf{y}) = \frac{Y_{\ell;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}) + 1}{(Y_{\ell;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}) + 1)|_{\text{Trop}(\mathbf{y})}} (F_{\ell;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}))^{-1} \prod_{i=1}^n (F_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}))^{[-b_{i\ell;t}]_+} \quad (2.3.10)$$

が成立する.

証明. 等式 (2.3.10) は (2.3.6) を t_0 で主係数を持つ団パターン上で考えて $x_1 = \dots = x_n = 1$ を代入することで得られる. \square

これを用いて, 分離公式を証明する.

定理 2.3.1 の証明. (2.3.1) を t と t_0 の \mathbb{T}_n における距離による帰納法を用いて示す. $t = t_0$ のときは明らか. $t \xrightarrow{\ell} t'$ に対して, $x_{i;t}$ が (2.3.1) を満たすとき, $x_{\ell;t'}$ も (2.3.1) を満たすことを確かめる. 等式 (2.3.6) より,

$$x_{\ell;t'} = \frac{(Y_{\ell;t}^{B;t_0} + 1)|_{\mathcal{F}(\hat{\mathbf{y}})}}{(Y_{\ell;t}^{B;t_0} + 1)|_{\mathbb{P}(\mathbf{y})}} \cdot x_{\ell;t}^{-1} \prod_{i=1}^n x_{i;t}^{[-b_{i\ell;t}]_+}, \quad (2.3.11)$$

を得る. 等式 (2.3.11) を t_0 で主係数を持つ団パターンに代入することで,

$$X_{\ell;t'} = \frac{(Y_{\ell;t}^{B;t_0} + 1)(\hat{\mathbf{y}})}{(Y_{\ell;t}^{B;t_0} + 1)|_{\text{Trop}(\mathbf{y})}(\mathbf{y})} \cdot X_{\ell;t}^{-1} \prod_{i=1}^n X_{i;t}^{[-b_{i\ell;t}]_+} \quad (2.3.12)$$

を得る. ただし, $X_{i;t}$ は $X_{i;t}^{B;t_0}$ を表している. (2.3.11) の右辺の各 $x_{i;t}$ に (2.3.1) で与えられる等式を代入して, (2.3.12) を用いて式を整理することで (2.3.10) の右辺が現れるので, これを (2.3.10) の左辺の項に書き換えることにより $x_{\ell;t'}$ が (2.3.1) を満たすことが示される. \square

この定理の系として定理 2.2.7 が従う:

定理 2.2.7 の証明. $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n$ をこれまで同様

$$\hat{y}_j = y_j \prod_i x_i^{b_{ij}} \quad (2.3.13)$$

とする. (2.2.9) によって次数を定めると,

$$\deg(\hat{y}_j) = 0 \quad (2.3.14)$$

となる. t_0 からの \mathbb{T}_n 上の距離における帰納法を用いる. $t = t_0$ のとき $X_{i;t}^{B;t_0} = x_i$ なので, 斉次多項式なのは明らか. (2.3.12) の右辺の各 $X_{i;t}^{B;t_0}$ が斉次多項式であると仮定したとき, 左辺が斉次多項式であることを示せば良い. 斉次多項式の積は斉次多項式であるから,

$$\frac{(Y_{\ell;t}^{B;t_0} + 1)(\hat{\mathbf{y}})}{(Y_{\ell;t}^{B;t_0} + 1)|_{\text{Trop}(\mathbf{y})}(\mathbf{y})}$$

が斉次であることを確かめる. 分母の $(Y_{\ell;t}^{B;t_0} + 1)(\hat{\mathbf{y}})$ は (2.3.14) により次数 0 であり, 分子は y_1, \dots, y_n のローラン単項式なので斉次である. よって示された. \square

さらに、定理 2.3.1 の $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ として t_0 で主係数を持つ団パターンをとることで、

$$F_{\ell;t}^{B;t_0} |_{\text{Trop}(\mathbf{y})}(\mathbf{y}) = 1 \quad (2.3.15)$$

を得る。次に分離公式の定理 2.3.1 から従う命題を 2 つ挙げる。

命題 2.3.5 ([FZ07, Proposition 3.13]). $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ を初期頂点が t_0 であるような任意の団パターンとする。このとき、任意の $t \in \mathbb{T}_n$ と $j \in \{1, \dots, n\}$ について、

$$y_{j;t} = Y_{j;t}^{B;t_0} |_{\text{Trop}(\mathbf{y})}(\mathbf{y}) \prod_{i=1}^n (F_{i;t}^{B;t_0} |_{\mathbb{P}(\mathbf{y})})^{b_{ij;t}} \quad (2.3.16)$$

が成立する。ここで、 $(b_{ij;t}) = B_t$ は t における交換行列である。

証明. (2.3.9) を主係数を持つ団パターンに適用して、 $x_1 = \dots = x_n = 1$ を代入する ($\hat{y}_i = y_i$ となる) ことで、

$$Y_{j;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}) = Y_{j;t}^{B;t_0} |_{\text{Trop}(\mathbf{y})}(\mathbf{y}) \prod_{i=1}^n (F_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}))^{b_{ij}} \quad (2.3.17)$$

を得る。 \mathbb{Q}_{sf} の普遍性から、 \mathbb{P} 上の $y_{j;t}$ について (2.3.16) が成立する。□

この命題の重要な点は、(2.3.16) 式の右辺が半体 $\text{Trop}(\mathbf{y})$ による演算が入った部分と \mathbb{P} による演算が入った部分に分かれている点である。すなわち、任意の団パターンの任意の係数組の元は $\text{Trop}(\mathbf{y})$ による演算の入った多項式 (正確には、これは単項式となる) と \mathbb{P} の演算が入った多項式の積で表されることがわかる。ここにもトロピカル半体の重要性が見てとれる。後のために (2.3.16) 式を C 行列を用いた表示に書き換えておく：

$$y_{j;t} = \prod_{k=1}^n y_k^{c_{kj;t}} \prod_{k=1}^n (F_{k;t}^{B;t_0} |_{\mathbb{P}(\mathbf{y})})^{b_{kj;t}}. \quad (2.3.18)$$

命題 2.3.5 から係数組の元を C 行列と F 多項式を用いて表した式を導出したが、もう 1 つの命題は、団変数を G 行列と F 多項式を用いて表すものである；

命題 2.3.6 ([FZ07, Corollary 6.3]). $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ を初期頂点が t_0 であるような任意の団パターンとする。このとき、次が成立する；

$$x_{j;t} = \prod_{i=1}^n x_i^{g_{ij;t}} \frac{F_{j;t}^{B;t_0} |_{\mathcal{F}(\hat{\mathbf{y}})}}{F_{j;t}^{B;t_0} |_{\mathbb{P}(\mathbf{y})}}. \quad (2.3.19)$$

ただし、 $\hat{y}_i = y_i \prod_{i=1}^n x_i^{b_{ij}}$ である。

証明. 定理 2.2.7 により、

$$X_{j;t}^{B;t_0}(\gamma_1 x_1, \dots, \gamma_n x_n; \dots, \prod_i \gamma_i^{-b_{ij}} y_j, \dots) = \left(\prod_i \gamma_i^{g_i} \right) X_{j;t}^{B;t_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.3.20)$$

が成立する。ここで、 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ は任意の有理関数である。(2.3.20) において $\gamma_i = x_i^{-1}$ とすることで

$$X_{j;t}^{B;t_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1^{g_{1j;t}} \dots x_n^{g_{nj;t}} F_{j;t}^{B;t_0}(\hat{\mathbf{y}}). \quad (2.3.21)$$

を得る。(2.3.21) を (2.3.1) に代入することで (2.3.19) を得る。□

等式 (2.3.18), (2.3.19) は, 主係数を持つ団パターンから定義される C 行列, G 行列と, 普遍的半体の和で定義される F 多項式が完全に分離された形の式によって団変数, 係数が記述されることを示している. よって, (2.3.18), (2.3.19) も**分離公式**と呼ぶことにしよう. これらの命題より, 主係数を持つ団パターンは C 行列, G 行列, F 多項式, 交換行列 B_t の 4 つの要素で決定されることがわかる.

2.4 点付曲面から誘導される団代数

団代数の種類によっては, 幾何学的な対象と対応を持つものが存在する. この節では, 点付曲面から誘導される団パターンとその団代数について定義する. 点付曲面と団代数, 団パターンの間の対応は, 団パターン, 団代数に幾何的, 組み合わせ論的手法を取り入れるために [FST08] によって導入された. ここで述べる定理は全て [FST08] の主定理であり, これらを証明するためには大掛かりな準備を要するためここでは概略を述べるに留めることにする.

まず, 点付曲面とその弧について定義する. S を連結な向き付きリーマン面とする. そして, M を S の平方における **点** (*marked points*) と呼ばれる有限集合とする. 特に, S の内部にある点を**穴** (*puncture*) と呼ぶ. このとき, (S, M) を**点付曲面** (*marked surface*) という. 以下, M は空でなく, S の境界成分ごとに少なくとも 1 つの点を持ち, (S, M) は次のいずれでもないと仮定する:

- 1 点付, 2 点付, または 3 点付の球面
- 穴を持たない, または 1 つ持つ一三角形
- 穴を持たない二三角形
- 穴を持たない三三角形

(S, M) 上の (タグなし) **弧** (*arc*) γ は, S 上の曲線で次を満たすものである:

- γ の端点は M に属する点である
- γ は端点となっている点以外では自己交差しない
- 端点を除き, γ は M や S の境界との共通部分を持たない
- γ は穴なし一三角形や穴なし二三角形を切り取らない (言い換えると, γ は M の元や S 境界に可縮でない).

ここで, γ は互いに $S \setminus M$ 上の道ホモトピーであるものを同一視するものとする. このタグなし弧を用いて, タグ付弧を定義する. 任意の (S, M) に属する弧 γ に対して, 両端に**タグ** (*tag*) と呼ばれるラベルをつけることを考える. **タグ付弧** (*tagged arc*) はタグなし弧の 2 つの端に**プレーン** (*plain*) か**ノッチ** (*notch*) (図 2.1) のどちらか 1 つのタグがついており, (タグなし弧の条件に加えて) 次の条件を満たすものである:

- 弧は 1 点付一三角形を切り取らない
- 境界上に端点を持つとき, その端点側の弧の端にあるタグはプレーンである
- ループの両端のタグは同じものである

後述するが, このタグ付弧は団パターンにおける団変数と対応する. これに関して, 点付曲面において団パターンにおける団に対応するタグ付三角形分割という概念を定める.

プレーン ———● ノッチ ———⊗●

図 2.1 タグ付弧

定義 2.4.1. 2つのタグ付弧 α と β について、次の条件が成立しているとき、またそのときに限り、2つのタグ付弧は**整合的** (*compatible*) であるという：

- α と β のタグを取り除いたものの道ホモトピー類を考えたときの、端点を除く最小交差数が0である
- α の β のタグを取り除いたものが異なる (道ホモトピーでない) とき、 α と β が端点 a を共有するならば、 a についてその端についている α と β についているタグが同じである
- α と β のタグを取り除いたものが一致する (道ホモトピーである) とき、少なくとも1つの端点について、その端についている α と β のタグが一致している

タグ付弧の部分集合で、任意の2元が整合的であるようなものを考え、この集合のことを整合的集合ということにする。このうち、弧の数が極大であるものを**タグ付三角形分割** (*tagged triangulation*) という。

注 2.4.2. 極大集合を構成する全ての弧がノッチタグを持たないとき、これらの弧は (S, M) を三角形分割している。これが「三角形分割」の名前の由来である。特に、穴がない点付曲面 (S, M) の場合、 (S, M) 上の整合的極大集合は常に本来の意味での三角形分割となる。団代数と三角形分割の関係は 1.1.1 節や 1.1.2 節で述べたように古くから考察されているが、タグ付弧やタグ付三角形分割は、この団代数と三角形分割の間に簡明な対応を与える為に本来の (S, M) 上の弧や三角形分割を拡張した結果現れたものである。

ここからは、注 2.4.2 で述べた団代数と三角形分割の間に存在する簡明な対応について説明する。まず、次の定理が成り立つ：

補題 2.4.3 ([FST08, Lemma 7.9]). 任意の (S, M) を1つ固定する。 (S, M) におけるタグ付三角形分割の濃度は、タグ付三角形分割の選び方によらず一定である。さらにこの濃度を n とすると、 $n-1$ 個の弧を持つ任意の整合的集合について、それを部分集合として持つタグ付三角形分割がちょうど2つ存在する。また、任意の2つのタグ付三角形分割はフリップの列で移り合う。

証明の概略. この証明では、**弧複体** (*arc complex*) を用いる。弧複体とは、互いに整合的な k 個の弧の組を $k-1$ 次元単体とする単体複体のことである。つまり、弧が単体複体の頂点に相当する。たとえば、1点付き三角形に関する弧複体を考えると図 2.2 のようになる (ただし、外側にある3つのタグ付弧とそれを結ぶ辺たちは三角形を構成しており、図はこの三角形を取り除いて平面展開している)。この図は互いに整合的な弧が線で結ばれており、単体の頂点にある弧を全て集めてきた集合がその単体に対応する整合的集合であることを示している。図を見ると、この複体は極大単体が全て同じ次元 (図中では三角形) であり、また余次元が1の単体 (図中では線分) は2つの極大単体に含まれていることがわかる。また、任意の極大単体はいくつかの隣り合う極大単体を經由して移り変わる (これらの条件を持つ単体複体を**擬多様体** (*pseudomanifold*) という)。弧複体の極大単体は極大整合的集合、すなわちタグ付三角形分割に相当する。これが一般的に成り立つことから、補題 2.4.3 が成

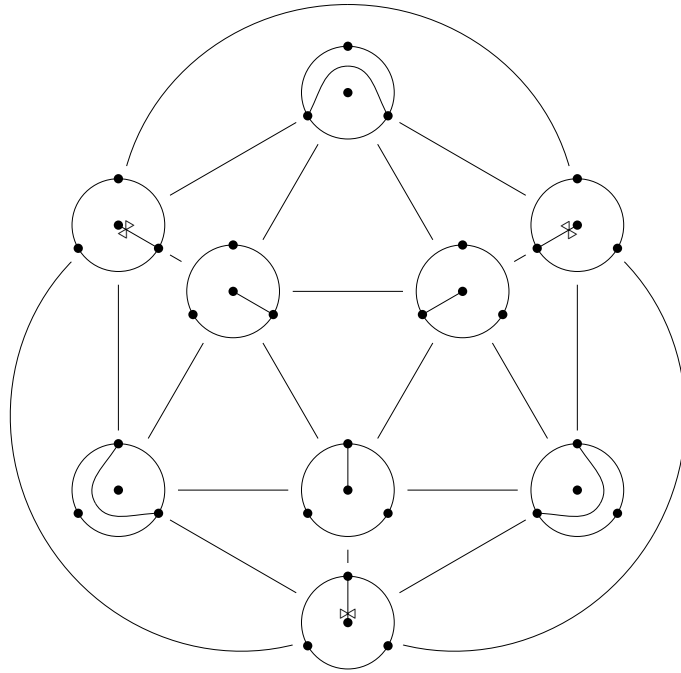


図 2.2 1点付三角形の弧複体

立する.

□

補題 2.4.3 中の n のことを (S, M) の **ランク** (*rank*) という.

注 2.4.4. タグ付三角形分割の各分割単位の種類は有限個である. 4点付き球面における例外的な分割方法 (図 2.3) を除くと, 三角形分割の中に見られる最小単位のパズル片は大別して図 2.4 の3種類に分かれる. この3種類のパズル片の左側にあるものを三角片, 真ん中にあるものを1孔片, 右側にあるものを2孔片とよぶことにする. 図 2.3 に示されるものを除く三角形分割は, 全て図 2.4 にある三角形と, それらのタグの付き方が異なるものたちの貼り合わせで構成されている.

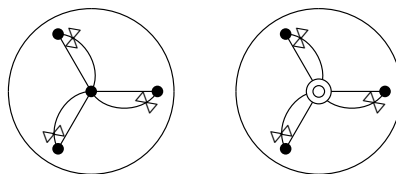


図 2.3 例外的三角形分割

(ただし, 右図中央の穴はここに入る弧の端が全てノッチタグを持っていることを示す)

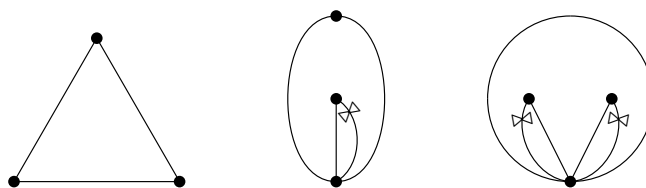


図 2.4 三角片, 1孔片, 2孔片

次に、タグ付三角形分割から団パターンにおける交換行列を定めることを考える。まずランクが n の点付曲面 (\mathbf{S}, \mathbf{M}) とそのタグ付三角形分割 T を任意に固定する。 T に付随する行列 $B = B(T)$ を定める。いくつか準備をする。便宜上 T の弧に 1 から n までのラベルをつけ、 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ とする。 \bar{T} を T に属するタグ付き弧からタグを取り除いた弧の集合とする。ここで、 $\bar{\gamma}_i \in \bar{T}$ を γ_i のタグを取り除いた弧としておく。 (\mathbf{S}, \mathbf{M}) における T からタグなし弧全体への写像 π_T を次で定める： 2 つのタグ付弧 $\gamma_i, \gamma_j \in T$ で、 $\bar{\gamma}_i = \bar{\gamma}_j$ であり、 $\bar{\gamma}_i$ の端点が a と b で、 γ_i と γ_j のタグが a 側の端で異なっているとき、 $\pi_T(\gamma_i) = \pi_T(\gamma_j)$ を b を端点として a を囲むようなループとして定める (図 2.5)。 T におけるそれ以外の弧については、 $\pi_T(\gamma_i) = \bar{\gamma}_i$ とする。 $\pi_T(T)$ の任意の辺が折りたたまれていな

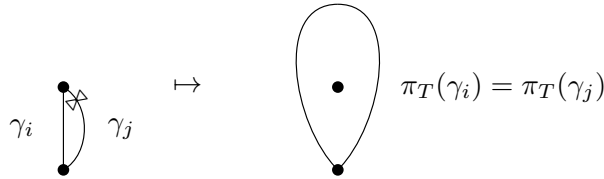


図 2.5 写像 π_T

い三角形 Δ について、 $n \times n$ 行列 $B^\Delta = (b_{ij}^\Delta)$ を次で定義する：

$$b_{ij}^\Delta = \begin{cases} 1 & \left(\begin{array}{l} \pi_T(\gamma_i) \text{ と } \pi_T(\gamma_j) \text{ が } \Delta \text{ の辺であり,} \\ \text{時計回りの順に } \pi_T(\gamma_i), \pi_T(\gamma_j) \text{ とならんでいるとき} \end{array} \right) \\ -1 & \text{(反時計回りの順に並んでいるとき)} \\ 0 & \text{(それ以外)} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

このとき、 $B = B(T) = (b_{ij})$ を

$$B = \sum_{\Delta} B^\Delta, \quad (2.4.2)$$

で定義する。ここでの総和は T における折りたたまれていない三角形 Δ すべてでとる。行列 B は $n \times n$ 歪対称行列であり、すべての成分が $0, 1, -1, 2, -2$ のいずれかに等しい。

定義 2.4.5. 点付曲面 (\mathbf{S}, \mathbf{M}) とそのタグ付三角形分割 T について、 (\mathbf{S}, \mathbf{M}) と T から誘導される団パターン、団代数を初期シードが $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B(T))$ であるような団パターン、団代数とする。逆に、団パターンまたは団代数について、初期交換行列 B について $B = B(T)$ となるような (\mathbf{S}, \mathbf{M}) と T が存在するとき、その団パターン、団代数を点付曲面系の団パターン、団代数という。

注 2.4.6. \mathbf{x}, \mathbf{y} の属する半体 \mathbb{P} や体 \mathcal{F} は任意なので、1 つの点付曲面と三角形分割から誘導される団パターンや団代数は一意的ではない。以下では、そのような団パターンや団代数を 1 つ取って固定して考えることにする。

以降、 $T = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ とする。つぎに、団パターンにおける変異にあたる操作であるフリップを定義する。

定義 2.4.7 ([FST08, Definition 3.5]). 点付曲面 (\mathbf{S}, \mathbf{M}) について、タグ付三角形分割 T を任意にとる。 i に関するフリップ (flip) φ_i を、 T から $(T \setminus \{\gamma_i\}) \cup \{\gamma'_i\}$ への変換とする。ただし、 γ'_i は $(T \setminus \{\gamma_i\})$ の各元と整合的であり γ_i と異なる (一意的な) 元であるとする。

次の2つの定理より、点付曲面と団パターン（団代数）の間に、フリップと変異、タグ付弧と団変数、タグ付三角形分割と団の1対1対応があることがわかる。

注 2.4.8. 定理 2.4.7 における γ'_i の一意性と存在は定理 2.4.3 により保証されている。

定理 2.4.9 ([FST08, Lemma 9.7]). 任意の (\mathbf{S}, \mathbf{M}) と T について、 $B(\varphi_i(T)) = \mu_i(B(T))$ が成立する。

証明の概略. タグ付三角形分割した際、 (\mathbf{S}, \mathbf{M}) は有限種類のパズル片に分かれることは 2.4.4 ですすでに説明した。フリップ操作によって変化するのはパズル片内の弧、または二つのパズル片に共有される弧なので、事例ごとに B の値の変化が交換関係式 (2.1.6) を満たすことを確認すれば良い。□

定理 2.4.10 ([FST08, Theorem 7.11]). (1) 1 点付閉曲面でない (\mathbf{S}, \mathbf{M}) とそのタグ付三角形分割 T を任意に固定する。 A, \mathfrak{A} をそれぞれ (\mathbf{S}, \mathbf{M}) におけるすべてのタグ付弧の集合、タグ付三角形分割の集合とし、 C, \mathfrak{C} をそれぞれ (\mathbf{S}, \mathbf{M}) と T から誘導される団パターンの団変数全体の集合、団全体の集合とする（ただし、後者は同じ団変数からなり順序の異なる団同士は同一視しているものとする）。このとき、

(i) 写像

$$\Psi : A \rightarrow C, \Psi(\varphi_{i_m} \cdots \varphi_{i_1}(\gamma_j)) = \mu_{i_m} \cdots \mu_{i_1}(x_j) \quad (2.4.3)$$

は全単射である。ここで、 $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ とする。

(ii) Ψ から誘導される写像

$$\bar{\Psi} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C} \quad (2.4.4)$$

は well-defined かつ全単射である。

(2) (\mathbf{S}, \mathbf{M}) が 1 点付閉曲面の場合は、 A として両端のタグがどちらもプレーンであるような弧全体、 \mathfrak{A} として両端のタグがどちらもプレーンであるような弧のみから構成されるタグ付三角形分割をとることで、(1) と同様の定理が成り立つ。

証明の概略. 弧複体に対応する、**団複体** (*cluster complex*) を考える。これは、1 つの団に含まれる団代数の濃度 k の部分集合を $k-1$ 次元単体とする単体複体である。すなわち、団変数が 1 つの頂点に対応しており、団が極大単体に対応している。ここで、団は常に個数が一定なので極大単体は全て同じ次元を持っている。また、団は変異により別の団に移るが、このとき 1 つを除いて他は全て同じ団変数であることを考えると、余次元が 1 の単体は少なくとも 2 つの極大単体により共有されることがわかる（実は常にちょうど 2 つの極大単体に含まれることがわかる）。よって、フリップは弧複体において極大単体を共有する超平面を含むような別の極大単体に移す操作であるが、実は変異も団複体上で全く同じ操作をしているものとみなすことができる。このフリップと団変異の対応を通して、ある平面 (\mathbf{S}, \mathbf{M}) による弧複体と、その (\mathbf{S}, \mathbf{M}) とタグ付三角形分割 T から誘導される団複体が同型であることが示される。ここで特に、団複体はその初期団の取り方に依存しない。□

注 2.4.11. (\mathbf{S}, \mathbf{M}) が 1 点付閉曲面の場合は、 A として両端のタグがどちらもプレーンであるような弧全体、 \mathfrak{A} として両端のタグがどちらもプレーンであるような弧のみから構成されるタグ付三角形分割をとることで、定理 2.4.10 と同様の定理が成り立つ。

これらの対応により、点付曲面から誘導される団パターン、団代数における問題が、点付曲面における問題に帰着させることができる。また、逆も然りである。第4章でこの対応を利用して団パターンの性質を調べる。

第3章

団代数の双対定理

C 行列, G 行列, F 多項式とそれによる団変数, 係数の表示が [FZ07] によって導入された (2.2 節参照) ことにより, 団代数の変異に関する研究には新しい視点が与えられた. それは, 団変数や係数とその変数を見る代わりにこれらを表現することのできる C 行列, G 行列, F 多項式とその関係式を見ることで変異の性質を探っていくという視点である. そのなかでも, 特に C 行列と G 行列に関する研究は数多くある. その主たるものが, 3.2 節で触れる C 行列と G 行列の符号同一性, そして C 行列と G 行列の双対性である. これらの研究において鍵となったのは, 行列の性質やその操作である. 例えば C 行列と G 行列の符号同一性は行列の「行」や「列」に現れる特徴を述べたものであり, また C 行列と G 行列の双対性は行列の「転置」「逆行列」といった操作を介して得られる団変数の性質である. 著者はこの点に着目し, 「 F 多項式についてもそこから行列を構成してそちらを調べることで新しい性質を見出せるのではないか」という考えに至った. この章の主定理は F 行列の自己双対性を与えた定理 3.3.6 である. この章の内容は, 藤原祥吾との共著論文 [FG18] を元に構成した.

3.1 後方変異

2.2 節では C 行列, G 行列, F 多項式を導入し, 変異によるこれらの間の関係式を与えた. このとき, C 行列, G 行列, F 多項式の下付き添え字である t が変化していたが, 逆に上付き添え字である $B; t_0$ が変化する場合, すなわち, 基準となる初期シードが \mathbb{T}_n 上の隣のシードに移った場合, C 行列, G 行列, F 多項式はどのように変化するだろうか. 著者は [FG18] において, これらの関係式を統一的に扱うために, 団と係数の間の変換である後方変異を定義した. これを説明しよう. $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y})$ を $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ による普遍的半体とする. $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ を, $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y})$ を係数体として持つ団パターンで初期係数 \mathbf{y}_{t_0} として形式的変数 \mathbf{y} を持つものとする. このとき, 初期係数組から (2.1.7) によって変異を繰り返していくと, $y_{i;t}$ は \mathbf{y} の有理関数で表されることがわかる. これを次のように表すことにする:

$$y_{i;t} = \mathcal{Y}_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}) \in \mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y}). \quad (3.1.1)$$

同様に, (2.1.8) によって変異を繰り返すことで $x_{i;t} \in \mathcal{F}$ は $\mathbb{Q}(\mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y}))$ を係数体として持つ $\mathbf{x}_{t_0} = \mathbf{x}$ の有理関数として表されることがわかる. これを次のように表すことにする:

$$x_{i;t} = \mathcal{X}_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{x}) \in \mathbb{Q}(\mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y}))(\mathbf{x}). \quad (3.1.2)$$

このとき、係数として \mathbb{P} をもつような任意の団パターン $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ について、 $x_{i;t}$ と $y_{i;t}$ は y_i を Σ_{t_0} の初期係数組の i 番目の元に移す代入写像 $\pi : \mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbb{P}$ によって復元することができる。 $t_1 \in \mathbb{T}_n$ を $t_0 \xrightarrow{k} t_1$ を満たす頂点とし、 $B_1 = \mu_k(B)$ と定める。このとき、 $\mathcal{Y}_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ と $\mathcal{Y}_{i;t}^{B_1;t_1}(\mathbf{y})$ は次の関係式を満たしている：

$$\mathcal{Y}_{i;t}^{B_1;t_1}(\mathbf{y}) = \rho_k(\mathcal{Y}_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})), \quad (3.1.3)$$

ここで、 ρ_k は次で定義される $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y})$ 上の半体同型写像である：

$$\begin{aligned} \rho_k : \mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y}) &\rightarrow \mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y}) \\ y_j &\mapsto \begin{cases} y_k^{-1} & (j = k) \\ y_j y_k^{[b_{kj}]_+} (y_k \oplus 1)^{-b_{kj}} & (\text{それ以外}). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

同様に、有理関数 $\mathcal{X}_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{x})$ と $\mathcal{X}_{i;t}^{B_1;t_1}(\mathbf{x})$ は次の関係式を満たしている：

$$\mathcal{X}_{i;t}^{B_1;t_1}(\mathbf{x}) = \rho_k(\mathcal{X}_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{x})), \quad (3.1.5)$$

ここで、 ρ_k は次で定義される体 $\mathbb{Q}(\mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y}))(\mathbf{x})$ 上の自己同型写像である：

$$\begin{aligned} \rho_k : \mathbb{Q}(\mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y}))(\mathbf{x}) &\rightarrow \mathbb{Q}(\mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y}))(\mathbf{x}) \\ y_j &\mapsto \begin{cases} y_k^{-1} & (j = k) \\ y_j y_k^{[b_{kj}]_+} (y_k \oplus 1)^{-b_{kj}} & (\text{それ以外}). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

$$x_j \mapsto \begin{cases} \frac{y_k \prod_{i=1}^n x_i^{[b_{ik}]_+} + \prod_{i=1}^n x_i^{[-b_{ik}]_+}}{(y_k \oplus 1)x_k} & (j = k) \\ x_j & (\text{それ以外}). \end{cases} \quad (3.1.7)$$

これらをそれぞれ関数 \mathcal{Y} 、関数 \mathcal{X} の**後方変異** (rear mutation) という。

注 3.1.1. $\mathcal{Y}_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ は前章の $Y_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ と同義であるが、 $\mathcal{X}_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は前章の $X_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と同義ではない（係数環が普遍的半体の群環かトロピカル半体の群環かの違いがある）ので、記号を揃えるために改めて $\mathcal{Y}_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ を導入している。

まず、後方変異から誘導される C 行列、 G 行列、 F 多項式に対して、それぞれの間の関係式を与えよう。なお、 G 行列と F 多項式については [FZ07] の引用であるが、 C 行列については著者の共著論文 [FG18] からの引用である。命題を述べる前に、まず H 行列について定義しておく：

定義 3.1.2 ([FZ07, (6.16)]). B を t_0 における交換行列とする。このとき、任意の t において、 $H_t^{B;t_0} = (h_{ij;t}^{B;t_0})$ の (i, j) 成分を次で定義する：

$$u^{h_{ij;t}^{B;t_0}} = F_{j;t}^{B;t_0} |_{\text{Trop}(u)}(u^{[-b_{i1}]_+}, \dots, u^{-1}, \dots, u^{[-b_{in}]_+}) \quad (u^{-1} \text{ は } i \text{ 番目の位置}). \quad (3.1.8)$$

この行列 $H_t^{B;t_0}$ を t における H 行列 (H -matrix) という。

このとき、 H 行列の成分は以下のようにも表せる：

補題 3.1.3 ([FZ07, Lemma 3.2]). 次の等式が成り立つ。

$$y_k' h_{kj;t}^{B;t_0} = F_{j;t}^{B;t_0} |_{\text{Trop}(\mathbf{y}')}(\mathbf{y}'), \quad (3.1.9)$$

ここで、 $\mathbf{y}' = (y_1', \dots, y_n')$ は k による変異で t_0 から移る t_1 における係数であるとする。

証明. 係数 $\text{Trop}(\mathbf{y}')$ を持つ団パターンを考える. $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ を t_0 における係数とすると, \mathbf{y} と \mathbf{y}' の間に以下の等式が成立する.

$$y_i = \begin{cases} y'_k{}^{-1} & (i = k), \\ y'_i y'_k{}^{[-b_{ki}]_+} & (i \neq k) \end{cases} \quad (3.1.10)$$

したがって, 任意の $j \in \{1, \dots, n\}$ に対して

$$\begin{aligned} F_{j;t}^{B;t_0} |_{\text{Trop}(\mathbf{y}')}(\mathbf{y}) &= F_{j;t}^{B;t_0} |_{\text{Trop}(\mathbf{y}')} (y'_1 y'_k{}^{[-b_{k1}]_+}, \dots, y'_k{}^{-1}, \dots, y'_n y'_k{}^{[-b_{kn}]_+}) \\ &\stackrel{(2.3.15)}{=} F_{j;t}^{B;t_0} |_{\text{Trop}(y'_k)} (y'_k{}^{[-b_{k1}]_+}, \dots, y'_k{}^{-1}, \dots, y'_k{}^{[-b_{kn}]_+}) \\ &= y'_k{}^{h_{kj;t}^{B;t_0}} \end{aligned}$$

となり示された. □

これを用いて, まず C 行列の後方変異から誘導される漸化式を与える.

命題 3.1.4 ([FG18, Proposition 3.3]). \mathbb{T}_n の頂点と辺について $t_0 \xrightarrow{k} t_1$ を仮定する. また, C 行列について $C_t^{B;t_0} = (c_{ij})$, $C_t^{B;t_1} = (c'_{ij})$ とする. このとき, 任意の $j \in \{1, \dots, n\}$ に対して

$$c'_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & (i \neq k); \\ -c_{kj} + \sum_{\ell=1}^n c_{\ell j} [-b_{k\ell}]_+ + \sum_{\ell=1}^n h_{k\ell} b_{\ell j;t} & (i = k). \end{cases} \quad (3.1.11)$$

$$c_{ij} = \begin{cases} c'_{ij} & (i \neq k); \\ -c'_{kj} + \sum_{\ell=1}^n c'_{\ell j} [b_{k\ell}]_+ + \sum_{\ell=1}^n h'_{k\ell} b_{\ell j;t} & (i = k). \end{cases} \quad (3.1.12)$$

が成立する. ただし, $h'_{k\ell}$ は

$$u^{h'_{k\ell}} = F_{\ell,t}^{B;t_1} |_{\text{Trop}(\mathbf{y})} (u^{[b_{k1}]_+}, \dots, u^{-1}, \dots, u^{[b_{kn}]_+}) \quad (u^{-1} \text{ は } k \text{ 番目の位置}) \quad (3.1.13)$$

を満たす整数とする.

証明. 補題 3.1.3 と同じ団パターンを考える. このとき, $y_{j;t}$ を (2.3.18) を用いて 2 通りの方法で表す.

$$y_{j;t} = \prod_{i=1}^n y_i^{c'_{ij;t}} \quad (3.1.14)$$

$$y_{j;t} = \prod_{i=1}^n y_i^{c_{ij;t}} \prod_{i=1}^n F_{i;t}^{B;t_0} |_{\text{Trop}(\mathbf{y}')}(\mathbf{y})^{b_{ij;t}}. \quad (3.1.15)$$

ここで, $C_t^{B;t_0} = (c_{ij;t})$, $C_t^{B;t_1} = (c'_{ij;t})$ とする. このとき,

$$\prod_{i=1}^n y_i^{c'_{ij;t}} = \prod_{i=1}^n y_i^{c_{ij;t}} \prod_{i=1}^n F_{i;t}^{B;t_0} |_{\text{Trop}(\mathbf{y}')}(\mathbf{y})^{b_{ij;t}} \quad (3.1.16)$$

が成立. (3.1.10) に (3.1.16) を代入して, (3.1.9) を用いることで

$$\prod_{i=1}^n y_i^{c'_{ij;t}} = \left(\prod_{i \neq k} y_i^{c_{ij;t}} y_k^{[-b_{ki}]_+ + c_{ij;t}} \right) y_k^{-c_{kj;t}} \prod_{i=1}^n y_k^{h_{ki;t} b_{ij;t}} \quad (3.1.17)$$

を得る. (3.1.17) の両辺における y'_i の指数を比較することで, (3.1.11) を得る. また, t_0 と t_1 を入れ替えることで同様に (3.1.12) を得る. \square

命題 3.1.5 ([FZ07, Proposition 6.8]). \mathbb{T}_n の頂点と辺について $t_0 \xrightarrow{k} t_1$ を仮定する. また, G 行列について $G_t^{B;t_0} = (g_{ij})$, $G_t^{B;t_1} = (g'_{ij})$ とする. このとき, 任意の $j \in \{1, \dots, n\}$ に対して

$$g'_{ij} = \begin{cases} -g_{kj} & (i = k); \\ g_{ij} + [b_{ik}]_+ g_{kj} + b_{ik} h_{kj} & (i \neq k), \end{cases} \quad (3.1.18)$$

$$g_{ij} = \begin{cases} -g'_{kj} & (i = k); \\ g'_{ij} + [-b_{ik}]_+ g'_{kj} + b_{ik} h'_{kj} & (i \neq k) \end{cases} \quad (3.1.19)$$

が成立する.

証明. (2.3.19) を用いて, $x_{i;t}$ を 2 通りの方法で表したものを等式で結ぶ:

$$\frac{F_{\ell;t}^{B;t_0} |_{\mathcal{F}(\hat{\mathbf{y}})}}{F_{j;t}^{B;t_0} |_{\mathbb{P}(\mathbf{y})}} \prod_i x_i^{g_i} = \frac{F_{j;t}^{B_1;t_1} |_{\mathcal{F}(\hat{\mathbf{y}}')}}}{F_{j;t}^{B_1;t_1} |_{\mathbb{P}(\mathbf{y}')}} \prod_i (x'_i)^{g'_i}. \quad (3.1.20)$$

ここで, \mathbf{y}' は補題 3.1.3 に用いられているものと同じものとする. 両辺 $\mathbb{P} = \text{Trop}(\mathbf{y})$ とすると, (3.1.20) の左辺は (2.3.15) より 1 である. また, (3.1.20) の右辺の分母は (3.1.9) の t_0 と t_1 を入れ替えることにより $y_k^{h'_k}$ に等しいことがわかる. したがって, (3.1.20) から

$$F_{j;t}^{B;t_0} |_{\mathcal{F}(\hat{\mathbf{y}})} \prod_i x_i^{g_i} = F_{j;t}^{B_1;t_1} |_{\mathcal{F}(\hat{\mathbf{y}}')} y_k^{-h'_k} \prod_i (x'_i)^{g'_i}. \quad (3.1.21)$$

を得る. (3.1.21) の任意の i に対して $x_i = 1$ を代入する. このとき, x'_k は $y_k + 1$, \hat{y}_j は y_j となることに注意する. \hat{y}'_j に $x_i = 1$ を代入したものは \bar{y}'_j と表記することにする. ここで, \bar{y}'_j は $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y})$ に属していることに注意する. すなわち,

$$F_{j;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}) = F_{j;t}^{B_1;t_1}(\bar{y}'_1, \dots, \bar{y}'_n) y_k^{-h'_k} (y_k + 1)^{g'_k}. \quad (3.1.22)$$

が成立する. $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(\mathbf{y})$ の普遍性から, y_i を \hat{y}_i に置き換えられるので, (3.1.22) から

$$F_{j;t}^{B;t_0} |_{\mathcal{F}(\hat{\mathbf{y}})} = F_{j;t}^{B_1;t_1} |_{\mathcal{F}(\hat{\mathbf{y}}')} \hat{y}_k^{-h'_k} (\hat{y}_k + 1)^{g'_k}. \quad (3.1.23)$$

を得る. (3.1.23) に (3.1.21) を代入して式を整理することで

$$\prod_i x_i^{g_i} = (\hat{y}_k / y_k)^{h'_k} (\hat{y}_k + 1)^{-g'_k} \prod_i (x'_i)^{g'_i}. \quad (3.1.24)$$

を得る. (2.3.13) と (2.1.10) より,

$$\hat{y}_k / y_k = \prod_i x_i^{b_{ik}}, \quad \hat{y}_k + 1 = \prod_i x_i^{-[-b_{ik}]_+} x_k x'_k$$

を得る. これらを (3.1.24) に代入すると x'_k が約分されて消え, x_1, \dots, x_n の単項式による等式となる. 各 x_i の指数を比較することで, (3.1.19) を得る. また, t_0 と t_1 を入れ替えることで同様に (3.1.18) を得る. \square

次に G 行列についての漸化式を与える.

命題 3.1.6 ([FZ07, (6.21)]). \mathbb{T}_n の頂点と辺について $t_0 \xrightarrow{k} t_1$ を仮定し, また $\mu_k(B) = B_1$ とする. このとき, 任意の $j \in \{1, \dots, n\}$ と $t \in \mathbb{T}_n$ について, 多項式 $F_{j;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ と $F_{j;t}^{B_1;t_1}(\mathbf{y})$ は次の関係式を持つ:

$$F_{j;t}^{B_1;t_1}(\mathbf{y}) = (1 + y_k)^{g_{kj}^{B;t_0}} y_k^{-h_{kj}^{B;t_0}} \times F_{j;t}^{B;t_0}(y_1 y_k^{[-b_{k1}]_+} (y_k + 1)^{b_{k1}}, \dots, y_k^{-1}, \dots, y_n y_k^{[-b_{kn}]_+} (y_k + 1)^{b_{kn}}), \quad (3.1.25)$$

ここで y_k^{-1} は k 番目の位置にある.

証明. (3.1.22) から直ちに従う. □

C 行列の変異に関する関係式 (2.2.10) と G 行列の後方変異に関する関係式 (3.1.11) を比較したり, あるいはその逆である G 行列の変異に関する関係式 (2.2.6) と G 行列の後方変異に関する関係式 (3.1.18) を比較すると, これらの関係は非常に似通っていることが見て取れる. ただし, 後方変異の方には成分 h_{ij}, h'_{ij} が含まれており, やや不完全な形である. 次の節では, これらの類似性がはっきり見える形に書き換えられることを見ていくことにする.

3.2 C 行列と G 行列の双対性

この節では, [NZ12] に沿って, y 変数 (係数) と x 変数 (団変数) により与えられた C 行列と G 行列が, 双対性と呼ばれる簡単な等式によって結びついていることを見る. そのために, 前節であげた命題 3.1.4, 命題 3.1.5 の関係性について見てみることにする. まず, (2.2.6), (2.2.7) 式を行列を用いて表すと

$$C_t^{B;t_0} = C_t^{B;t_0}(J_\ell + [\varepsilon B_t]_+^{\bullet\ell}) + [-\varepsilon C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell} B_t \quad (3.2.1)$$

となる. ここで, J_ℓ は $n \times n$ 単位行列の (ℓ, ℓ) 成分を -1 に置換したものとし, $[M]_+ = ([m_{ij}]_+)$, $M^{k\bullet}$ を M の k 列以外の全ての成分を 0 に置換した行列, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とした (この記号はこれ以降断りなく使用するものとする). 同様に, (2.2.10), (2.2.11) 式を行列を用いた形で表す:

$$G_t^{B;t_0} = G_t^{B;t_0}(J_\ell + [-\varepsilon B_t]_+^{\bullet\ell}) - B[-\varepsilon C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell} \quad (3.2.2)$$

ただし, $M^{k\bullet}$ を M の k 行以外の全ての成分を 0 に置換した行列である.

注 3.2.1. 3.2.2 の右辺の ε を ± 1 のどちらでとっても値は同じなので,

$$G_t^{B;t_0}(J_\ell + [-B_t]_+^{\bullet\ell}) - B[-C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell} = G_t^{B;t_0}(J_\ell + [B_t]_+^{\bullet\ell}) - B[C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell}$$

整理して

$$G_t^{B;t_0} B_t = B C_t^{B;t_0} \quad (3.2.3)$$

を得る.

(3.2.1) と (3.2.2) は式の形が非常に似ていることが見て取れるが, 次の定理によりこの 2 式はさらに簡単な形で表される.

定理 3.2.2 ([GHKK18, Corollary 5.5]). 団パターン $t \mapsto \Sigma_t$ と初期シード t_0 が与えられているとする。任意の頂点 t に付随する任意の C 行列の列ベクトル, すなわち c ベクトルについて, 全ての成分が非負, または全ての成分が非正のどちらか一方が成立する。

定理 3.2.2 の証明は**散乱図形** (*scattering diagram*) を用いたものであり, 紙数を要するためここでは省略する。この定理の性質を C 行列の**列符号同一性** (*column sign-coherence of the C -matrices*) という。

注 3.2.3. C 行列の列符号同一性から C の各列成分が $\mathbf{0}$ ベクトルでないことが従う。実際, $C_t^{B;t_0}$ の ℓ 列成分が非負かつ $\mathbf{0}$ ベクトルでない, 非正かつ $\mathbf{0}$ ベクトルでない, $\mathbf{0}$ ベクトル, のどれであっても, C 行列の漸化式 (3.2.1) の右辺末項は適切な符号 ε をとることで消去できる。このとき, $\det(J_\ell + [\varepsilon B_t]_+^{\ell\bullet}) = -1$ であり, $\det(C_{t_0}^{B;t_0}) = \det(I_n) = 1$ なので頂点の \mathbb{T}_n 上の距離についての帰納法により $\det(C_t^{B;t_0}) = \pm 1$ となる。 $\mathbf{0}$ ベクトルがある C 行列に含まれているとすると, その C 行列の行列式の値は 0 となるが, これは矛盾である。

C 行列の符号同一性により C 行列の各列は正または負の符号を持つとみなせる。

定義 3.2.4. $\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{B;t_0})$ を $C_t^{B;t_0}$ の ℓ 列目の符号とする。すなわち, ℓ 列目の 0 でない成分を持つ符号を $\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{B;t_0})$ で定める。これを**トロピカル符号** (*tropical sign*) と呼ぶ。

定理 3.2.2 と注 3.2.3 から次の命題が従う。

命題 3.2.5 ([NZ12, Proposition 1.3]). \mathbb{T}_n の頂点と辺について $t \xrightarrow{\ell} t'$ を仮定する。このとき, 次の等式が成立する:

$$C_{t'}^{B;t_0} = C_t^{B;t_0} (J_\ell + [\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{B;t_0}) B_t]_+^{\ell\bullet}), \quad (3.2.4)$$

$$G_{t'}^{B;t_0} = G_t^{B;t_0} (J_\ell + [-\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{B;t_0}) B_t]_+^{\ell\bullet}). \quad (3.2.5)$$

証明. (3.2.1), (3.2.2) の右辺の末項を消去するように ε を定めれば良い。□

さらに, この2つの関係式の対比から t と t_0 の \mathbb{T}_n 上の距離における帰納法によって次の命題が従う。

命題 3.2.6 ([NZ12, (1.11)]). 任意の歪対称化可能行列 B と任意の $t_0, t \in \mathbb{T}_n$ について,

$$(G_t^{B;t_0})^T = (C_t^{-B^T;t_0})^{-1} \quad (3.2.6)$$

が成立する。

証明. (3.2.6) を t と t_0 の間の \mathbb{T}_n 上の距離による帰納法を用いて示す。 $t = t_0$ のときは (3.2.6) の両辺共に単位行列 I_n である。(3.2.6) がある $t \in \mathbb{T}_n$ で成立しているとき, $t \xrightarrow{\ell} t'$ を満たす t' で成立することを示す。まず, 次の3つの事実を確認しておく:

(i) 任意の整数正方行列 B について, 任意の ℓ で $b_{\ell\ell} = 0$ を満たすならば,

$$(J_\ell + B^{\bullet\ell})^T = J_\ell + (B^T)^{\ell\bullet}, \quad (J_\ell + B^{\ell\bullet})^{-1} = J_\ell + B^{\ell\bullet} \quad (3.2.7)$$

である。

(ii) $B_{t_0} = B$ を $-B^T$ に置き換えると B_t は $-B_t^T$ に置き換わり, また

$$C_t^{-B^T; t_0} = DC_t^{B; t_0} D^{-1} \quad (3.2.8)$$

が成立する. ここで, D は $n \times n$ 正定値対角行列であり, $-B^T = DBD^{-1}$ を満たすものとする.

(iii) 特に, $\varepsilon_{\bullet \ell}(C_t^{-B^T; t_0}) = \varepsilon_{\bullet \ell}(C_t^{B; t_0})$ が任意の ℓ に対して成立する.

実際に計算することで

$$\begin{aligned} (G_t^{B; t_0})^T &= (J_\ell + [-\varepsilon_{\bullet \ell}(C_t^{B; t_0})B_t]_{+}^{\bullet \ell})^T (G_t^{B; t_0})^T \\ &= (J_\ell + [-\varepsilon_{\bullet \ell}(C_t^{B; t_0})B_t]_{+}^{\bullet \ell})^T (C_t^{-B^T; t_0})^{-1} \\ &= (J_\ell + [-\varepsilon_{\bullet \ell}(C_t^{B; t_0})B_t^T]_{+}^{\ell \bullet}) (C_t^{-B^T; t_0})^{-1} \\ &= (C_t^{-B^T; t_0} (J_\ell + [\varepsilon_{\bullet \ell}(C_t^{-B^T; t_0})(-B_t^T)]_{+}^{\ell \bullet}))^{-1} \\ &= (C_t^{-B^T; t_0})^{-1} \end{aligned}$$

を得る. □

さらに, 命題 3.2.5 と命題 3.2.6 を組み合わせることにより, 次の命題を得る.

命題 3.2.7 ([NZ12, Proposition 1.4, (1.12)]). (1) \mathbb{T}_n の頂点と辺について $t_0 \xrightarrow{k} t_1$ を仮定する. このとき, 次の等式が成立する:

$$C_t^{B_1; t_1} = (J_k + [-\varepsilon_{k \bullet}(C_{t_0}^{-B_t; t})B_t]_{+}^{k \bullet}) C_t^{B; t_0}. \quad (3.2.9)$$

(2) 任意の歪対称化可能行列 B と任意の $t_0, t \in \mathbb{T}_n$ について,

$$C_t^{B; t_0} = (C_{t_0}^{-B_t; t})^{-1} \quad (3.2.10)$$

が成立する.

証明. (3.2.9) と (3.2.10) を帰納法を用いて同時に示す. まず, $B_1^{k \bullet} = -B^{k \bullet}$ と $(C_{t_1}^{-B_t; t})^{k \bullet} = -(C_{t_0}^{-B_t; t})^{k \bullet}$ から $\varepsilon_{k \bullet}(C_{t_1}^{-B_t; t}) = -\varepsilon_{k \bullet}(C_{t_0}^{-B_t; t})$ が従うことに注意しておく. (3.2.7) の第 2 等式から (3.2.9) の t_0 と t_1 は入れ替えてよい. したがって, (3.2.9) を示すのに, t_0 は t から t_1 への \mathbb{T}_n 上の一意な道上に存在することを仮定して良い. すなわち, $d(t, t_1) = d(t, t_0) + 1$ であるとする. ここで, $d(t, t_0)$ は t と t_0 の間の \mathbb{T}_n 上の距離である.

$d \geq 0$ について, (i_d) と (ii_d) を次の 2 つの命題とする:

(i_d) 等式 (3.2.10) が $d(t, t_0) = d$ について成立する.

(ii_d) 等式 (3.2.9) が $d(t, t_1) = d(t, t_0) + 1$ の仮定のもとで $d(t, t_0) = d$ について成立する.

(i_d) と (ii_d) を d についての同時帰納法で示す.

$d = 0$, すなわち $t = t_0$ のとき, $C_{t_0}^{B; t_0} = I_n = C_{t_0}^{-B_t; t_0}$ より (3.2.10) が成立. また, $H_{t_0}^{B; t_0} = O$ より, (3.1.11) を用いて

$$C_{t_0}^{B_1; t_1} = (J_k + [-B]_{+}^{k \bullet}) C_{t_0}^{B; t_0} \quad (3.2.11)$$

より (3.2.9) が成立する.

以下, $(i_d), (ii_d) \implies (i_{d+1})$ と $(i_d), (ii_d) \implies (ii_{d+1})$ を示す.

$(i_d), (ii_d) \implies (i_{d+1})$ を証明する. (3.2.10) と (3.2.9) が $d(t, t_1) = d(t, t_0) + 1$ の仮定を満たす t, t_0, t_1 で成立しているとする. このとき, (3.2.10) は t_0 と t_1 , B と $B_1 = \mu_k(B)$ を入れ替えても成立することを示す. すなわち, $C = C_t^{B; t_0}$ としたとき,

$$C_t^{B_1; t_1} = (C_{t_1}^{-B_t; t})^{-1} \quad (3.2.12)$$

をいえばよい. (3.2.9), (3.2.7) の 2 番目の等式, 帰納法の仮定 $C^{-1} = C_{t_0}^{-B_t; t}$ (3.2.4) の 1 番目の等式を用いることで

$$\begin{aligned} (C_t^{B_1; t_1})^{-1} &= ((J_k + [-\varepsilon_{\bullet k}(C_{t_0}^{-B_t; t})B]_+^{k\bullet}) C)^{-1} \\ &= C^{-1}(J_k + [-\varepsilon_{\bullet k}(C_{t_0}^{-B_t; t})B]_+^{k\bullet}) \\ &= C_{t_0}^{-B_t; t}(J_k + [\varepsilon_{\bullet k}(C_{t_0}^{-B_t; t})(-B)]_+^{k\bullet}) \\ &= C_{t_1}^{-B_t; t} \end{aligned}$$

を得る.

$(i_d), (ii_d) \implies (ii_{d+1})$ を証明する. $d(t_0, t) = d$, $t_1, t' \in \mathbb{T}_n$ を $t_0 \xrightarrow{k} t_1$, $t \xrightarrow{\ell} t'$ を満たすとする. ここで, $d(t_1, t) = d(t_0, t') = d + 1$, $d(t_1, t') = d + 2$ である. 既に (i_d) と (ii_d) から (i_{d+1}) を示したので, 以下を仮定してよい:

$$C_t^{B_1; t_1} = (C_{t_1}^{-B_t; t})^{-1}, \quad C_{t'}^{B; t_0} = (C_{t_0}^{-B_{t'}; t'})^{-1}. \quad (3.2.13)$$

また, 仮定 (ii_d) により

$$C_t^{B_1; t_1} = (J_k + [-\varepsilon_{\bullet k}(C_{t_0}^{-B_t; t})B]_+^{k\bullet}) C_t^{B; t_0}, \quad (3.2.14)$$

$$C_{t_0}^{-B_{t'}; t'} = (J_\ell + [\varepsilon_{\bullet \ell}(C_t^{B; t_0})B_t]_+^{\ell\bullet}) C_{t_0}^{-B_t; t}, \quad (3.2.15)$$

を得る. ここで, 示すべきは

$$C_{t'}^{B_1; t_1} = (J_k + [-\varepsilon_{\bullet k}(C_{t_0}^{-B_{t'}; t'})B]_+^{k\bullet}) C_{t'}^{B; t_0} \quad (3.2.16)$$

である. (3.2.16) を示すために, (3.2.4) を用いて次の等式を用意しておく:

$$C_{t'}^{B; t_0} = C_t^{B; t_0}(J_\ell + [\varepsilon_{\bullet \ell}(C_t^{B; t_0})B_t]_+^{\ell\bullet}), \quad C_{t'}^{B_1; t_1} = C_t^{B_1; t_1}(J_\ell + [\varepsilon_{\bullet \ell}(C_t^{B_1; t_1})B_t]_+^{\ell\bullet}). \quad (3.2.17)$$

(3.2.14) から直ちに変換 $C_t^{B; t_0} \mapsto C_t^{B_1; t_1}$ によって変化する成分は k 行成分のみであることがわかる.

次の 2 通りの場合を考える.

(I) $C_t^{B; t_0}$ は 0 でない (i, ℓ) 成分をある $i \neq k$ において持つ.

(II) $C_t^{B; t_0}$ の ℓ 列成分で 0 でない成分が (k, ℓ) 成分のみである.

すなわち, $C_t^{B; t_0}$ の ℓ 列成分は $\varepsilon \mathbf{e}_k$ で表される (\mathbf{e}_i は \mathbb{Z}^n の標準基底). ここで $C_t^{B; t_0}$ と $C_{t_0}^{-B_t; t}$ はどちらも整数行列なので $\varepsilon = \pm 1$ である.

まず (I) について証明する. 変換 $C_t^{B;t_0} \mapsto C_t^{B_1;t_1}$ によって変化する成分は k 行成分のみであることから, $\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{B_1;t_1}) = \varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{B;t_0})$ が成立する (ここで, C 行列の符号同一性を用いていることに注意). いま, (3.2.16) を導出するためには次の等式が成り立てば良い:

$$\varepsilon_{\bullet k}(C_{t_0}^{-B_{t'};t'}) = \varepsilon_{\bullet k}(C_{t_0}^{-B_t;t}). \quad (3.2.18)$$

実際, (3.2.18) が成立すると仮定すると,

$$\begin{aligned} C_{t'}^{B_1;t_1} &= C_t^{B_1;t_1} (J_\ell + [\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{B_1;t_1}) B_t]_+^{\ell\bullet}) \\ &= (J_k + [\varepsilon_{\bullet k}(C_t^{-B_t;t}) B]_+^{k\bullet}) C_t^{B;t_0} (J_\ell + [\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{B_1;t_1}) B_t]_+^{\ell\bullet}) \\ &= (J_k + [\varepsilon_{\bullet k}(C_t^{-B_t;t}) B]_+^{k\bullet}) C_t^{B;t_0} (J_\ell + [\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{B;t_0}) B_t]_+^{\ell\bullet}) \\ &= (J_k + [\varepsilon_{\bullet k}(C_t^{-B_t;t}) B]_+^{k\bullet}) C_{t'}^{B;t_0} \\ &= (J_k + [\varepsilon_{\bullet k}(C_t^{-B_{t'};t'}) B]_+^{k\bullet}) C_{t'}^{B;t_0} \end{aligned}$$

となる. ここで, 式変形に (3.2.17) と (3.2.14) を用いた. 以下, (3.2.18) を求める. (3.2.14) の第 2 式から $C_{t_0}^{-B_t;t} \mapsto C_{t_0}^{-B_{t'};t'}$ は ℓ 列目のみが変化する. よって, このとき $\varepsilon_{\bullet k}(C_{t_0}^{-B_{t'};t'}) = \varepsilon_{\bullet k}(C_{t_0}^{-B_t;t})$ である. よって, $C_{t_0}^{-B_t;t}$ がある $i \neq \ell$ に対して (i, k) 成分は 0 でないことを示せば (3.2.18) がそこから従う. ここで, (id) の仮定より $C_t^{B;t_0}$ と $C_{t_0}^{-B_t;t}$ は互いに逆行列なので, 任意の k と ℓ について, 可逆行列 C がある $i (\neq k)$ に対して (i, ℓ) 成分が 0 でないことと, C^{-1} がある $i (\neq \ell)$ に対して (i, k) 成分が 0 でないことが同値であることを示せば十分であり, さらにこれは任意の k と ℓ に対して, 可逆行列 C の ℓ 列目が εe_k の形で書けることと C^{-1} の k 列目が εe_ℓ であることが同値であることを確認すればよい. この確認は容易である.

これによって (3.2.16) の (I) が示される.

(II) を仮定する. (I) の最後の議論から, $C_t^{B;t_0}$ の ℓ 列目は εe_k , ある $\varepsilon = \pm 1$ に対して, $(C_t^{B;t_0})^{-1} = C_{t_0}^{-B_t;t}$ の k 列目は εe_ℓ である. 特に,

$$\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{B;t_0}) = \varepsilon_{\bullet k}(C_{t_0}^{-B_t;t}) = \varepsilon$$

である. (3.2.14) の二つの等式を用いることで, $C_t^{B_1;t_1}$ の ℓ 列目は $-\varepsilon e_k$ であり, $C_{t_0}^{-B_{t'};t'}$ の k 列目は $-\varepsilon e_\ell$ である. したがって,

$$\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{B_1;t_1}) = \varepsilon_{\bullet k}(C_{t_0}^{-B_{t'};t'}) = -\varepsilon$$

である. (3.2.17) と (3.2.14) を組み合わせることで, 結論である (3.2.16) を次のように書き換える:

$$(J_k + [-\varepsilon B]_+^{k\bullet}) C_t^{B;t_0} (J_\ell + [-\varepsilon B_t]_+^{\ell\bullet}) = (J_k + [\varepsilon B]_+^{k\bullet}) C_t^{B;t_0} (J_\ell + [\varepsilon B_t]_+^{\ell\bullet})$$

さらにこれを (3.2.7) を用いて

$$(J_k + [\varepsilon B]_+^{k\bullet})(J_k + [-\varepsilon B]_+^{k\bullet}) C_t^{B;t_0} = C_t^{B;t_0} (J_\ell + [\varepsilon B_t]_+^{\ell\bullet})(J_\ell + [-\varepsilon B_t]_+^{\ell\bullet})$$

と書き換えると, これを整理することで

$$(I_n + \varepsilon B^{k\bullet}) C_t^{B;t_0} = C_t^{B;t_0} (I_n + \varepsilon B_t^{\ell\bullet})$$

を得る. さらに両辺 $C_t^{B;t_0}$ を消して

$$B^{k\bullet} C_t^{B;t_0} = C_t^{B;t_0} B_t^{\ell\bullet}. \quad (3.2.19)$$

を得る. これを示す. 簡単のため,

$$G_t^{B;t_0} = G, \quad C_t^{B;t_0} = C$$

としておく. (3.2.6) の証明で示したように,

$$G^T = (C_t^{-B^T;t_0})^{-1} = DC^{-1}D^{-1}, \quad (3.2.20)$$

が成立している. ここで D は $-B^T = DBD^{-1}$ を満たす正定値対角行列である. 特に, G^T の k 列は $d_\ell d_k^{-1} \varepsilon \mathbf{e}_\ell$ に等しい. ここで, G^T とその逆行列 $C_t^{-B^T;t_0}$ は整数行列なので, $d_\ell = d_k$ となる. よって, G の k 行は $\varepsilon \mathbf{e}_\ell^T$ に等しい. この事実と (3.2.3) の両辺 k 行目を用いることで, 任意の $j = 1, \dots, n$ に対して

$$\varepsilon b_{\ell j; t} = \sum_p b_{kp} c_{pj}$$

を得る. これを行列の形に書くことで (3.2.19) が得られ, 等式 (3.2.10) が示された ((II) の仮定より, $C_t^{B;t_0}$ の k 列は \mathbf{e}_ℓ であることに注意). \square

2つの等式 (3.2.6), (3.2.10) を組み合わせることにより,

$$(G_t^{B;t_0})^T = C_{t_0}^{B^T;t} \quad (3.2.21)$$

を得る. この等式を C 行列と G 行列の双対性, またはトロピカル双対性 (*tropical duality*) と呼ぶ. この双対性は G 行列が (同一の団代数におけるものではない) C 行列によって決定される, ということを意味している. 当然逆も然りである. この双対性を通してわかる C 行列と G 行列の具体的な関連を見ていくことにする.

まずすぐにわかることとして, C 行列の列符号同一性に対応する, G 行列の行符号同一性 (*low sign-coherence of the G-matrices*) がある:

定理 3.2.8 ([GHKK18, Corollary 5.11]). 団パターン $t \mapsto \Sigma_t$ と初期シード t_0 が与えられているとする. 任意の頂点 t に付随する任意の G 行列の各行ベクトルについて, 全ての成分が非負, または全ての成分が非正のどちらか一方が成立する.

C 行列のトロピカル符号に対応して, G 行列の行に関する符号の記号を定めておく.

定義 3.2.9. $\varepsilon_{\ell \bullet}(G_t^{B;t_0})$ を $G_t^{B;t_0}$ の ℓ 列目の符号とする. すなわち, ℓ 行目の 0 でない成分を持つ符号を $\varepsilon_{\ell \bullet}(G_t^{B;t_0})$ で定める.

(3.2.1) と (3.2.2) に (3.2.21) を代入して記号を整理することで以下の等式を得る:

$$C_t^{B_1;t_1} = (J_\ell + [-\varepsilon B]_+^{\ell \bullet}) C_t^{B;t_0} - [-\varepsilon G_t^{B;t_0}]_+^{\ell \bullet} B_t, \quad (3.2.22)$$

$$G_t^{B_1;t_1} = (J_\ell + [\varepsilon B]_+^{\ell \bullet}) G_t^{B;t_0} + B[-\varepsilon G_t^{B;t_0}]_+^{\ell \bullet}. \quad (3.2.23)$$

ここに G 行列の符号同一性を用いることで, (3.2.22) と (3.2.23) から次の命題を得る:

命題 3.2.10 ([FG18, (3.28),(3.29)]). \mathbb{T}_n の頂点と辺について $t_0 \xrightarrow{k} t_1$ を仮定する. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$C_t^{B_1;t_1} = (J_k + [-\varepsilon_{k \bullet}(G_t^{B;t_0}) B]_+^{k \bullet}) C_t^{B;t_0}, \quad (3.2.24)$$

$$G_t^{B_1;t_1} = (J_k + [\varepsilon_{k \bullet}(G_t^{B;t_0}) B]_+^{k \bullet}) G_t^{B;t_0}. \quad (3.2.25)$$

ただし $\varepsilon_{k\bullet}(G_t^{B;t_0})$ は $G_t^{B;t_0}$ の k 行目の符号とする.

ここで, (3.2.24) は (3.2.9) に (3.2.21) を代入することでも得られることに注意. また, 前節でも初期頂点の変異で移り合う C 行列, G 行列の関係式を与えた (命題 3.1.4, 3.1.5) が, こちらと上の式の関係性を見してみる. (2.2.6), (2.2.7) の行列表示, (2.2.10), (2.2.11) の行列表示をそれぞれ考えると,

$$C_t^{B_1;t_1} = (J_k + [-\varepsilon B]_+^{k\bullet})C_t^{B;t_0} + H_t(\varepsilon)^{k\bullet}B_t, \quad (3.2.26)$$

$$G_t^{B_1;t_1} = (J_k + [\varepsilon B]_+^{k\bullet})G_t^{B;t_0} - BH_t(\varepsilon)^{k\bullet}, \quad (3.2.27)$$

となる. ただし, $H_t(+)=H_t^{B_0;t_0} := (h_{ij})$, $H_t(-)=H_t^{B_1;t_1} := (h'_{ij})$ とする. このとき, 特に (3.2.23) と (3.2.27) を比較することで次の命題を得る.

命題 3.2.11 ([FG18, Proposition 3.7]). 任意の k について, 次の等式を得る:

$$H_t^{B_0;t_0} = -[-G_t^{B_0;t_0}], \quad H_t^{B_1;t_1} = -[G_t^{B;t_0}]. \quad (3.2.28)$$

証明. 各 k において, (3.2.23) と (3.2.27) から

$$BH_t(\varepsilon)^{k\bullet} = B[-\varepsilon G_t^{B;t_0}]_+^{k\bullet} \quad (3.2.29)$$

を得る. $\varepsilon = 1$ のとき, B の各行に少なくとも 1 つ 0 でない成分が存在すれば, その 0 でない成分 b_{ik} を用いて

$$b_{ik}[-g_{kj}]_+ = b_{ik}(-h_{kj}) \quad (3.2.30)$$

を得る. 両辺 $-b_{ik}^{-1}$ を掛けて $-[-g_{kj}]_+ = h_{kj}$ を得る. $\varepsilon = -1$ のときも同様. これで B が $\mathbf{0}$ ベクトルを列成分として持たないときは示された. これを用いて, B が $\mathbf{0}$ ベクトルを列成分として持つ場合について考える. B が $m (\neq 0)$ 個の $\mathbf{0}$ ベクトルを持つと仮定する. \mathbb{T}_n の辺のラベルを適当に置換することで,

$$B = \begin{bmatrix} B' & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

を仮定して良い. ここで, B' は $\mathbf{0}$ ベクトルを列成分として持たない $(n-m) \times (n-m)$ 正方行列である. この仮定下において, $t_0 \xrightarrow{i_1} \dots \xrightarrow{i_s} t$ に対して,

$$\mu_{i_s} \dots \mu_{i_2} \mu_{i_1} (G_{t_0}^{B;t_0})|_{n-m} = \begin{bmatrix} \mu_{i'_\ell} \dots \mu_{i'_2} \mu_{i'_1} (G_{t_0}^{B';t_0}) \\ O \end{bmatrix}, \quad (3.2.31)$$

$$\mu_{i_s} \dots \mu_{i_2} \mu_{i_1} (H_{t_0}^{B;t_0})|_{n-m} = \begin{bmatrix} \mu_{i'_\ell} \dots \mu_{i'_2} \mu_{i'_1} (H_{t_0}^{B';t_0}) \\ O \end{bmatrix}, \quad (3.2.32)$$

を得る. ここで, (i'_1, \dots, i'_ℓ) は $n-m+1, \dots, n$ から (i_1, \dots, i_s) を除いたものであり, $|_{n-m}$ は左側の $n \times (n-m)$ 部分行列を取る操作を示している. B の他の対角成分についても同様の操作を行うことで,

$$\begin{aligned} G_t^{B;t_0} &= G_{t'}^{B';t_0} \oplus G_{t_1}^{(0);t_0} \oplus \dots \oplus G_{t_m}^{(0);t_0}, \\ H_t^{B;t_0} &= H_{t'}^{B';t_0} \oplus H_{t_1}^{(0);t_0} \oplus \dots \oplus H_{t_m}^{(0);t_0}, \end{aligned}$$

を得る. ここで, t' は \mathbb{T}_n の部分木 \mathbb{T}_{m-n} の頂点であり, $\Sigma_{t'} = \mu_{i'_\ell} \dots \mu_{i'_1}(\Sigma_{t_0})$ を満たしているものとする. また, 任意の $j \in \{1, \dots, m\}$ に対して t_j は

$$t_j = \begin{cases} t_0 & (n-m+j \text{ の } (i_1, \dots, i_s) \text{ における出現回数が偶数}), \\ t'_0 & (n-m+j \text{ の } (i_1, \dots, i_s) \text{ における出現回数が奇数}), \end{cases}$$

を満たす $\mathbb{T}_1: t_0 \xrightarrow{j} t'_0$ の頂点であるとする. このとき,

$$G_t^{B;t_0} = \begin{bmatrix} G_{t'}^{B';t_0} & & & O \\ & (-1)^{N_1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & (-1)^{N_m} \end{bmatrix},$$

$$H_t^{B;t_0} = \begin{bmatrix} H_{t'}^{B';t_0} & & & O \\ & -[(-1)^{N_1+1}]_+ & & \\ & & \ddots & \\ O & & & -[(-1)^{N_m+1}]_+ \end{bmatrix},$$

である. ここで, N_j は (i_1, \dots, i_s) における $n-m+j$ の出現回数である. B' は $\mathbf{0}$ ベクトルを列成分に持たず,

$$\begin{bmatrix} B'[-G_{t'}^{B';t_0}]_+ & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B'H_{t'}^{B';t_0} & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

が成立しているので, (3.2.30) から $[-G_{t'}^{B';t_0}]_+ = -H_{t'}^{B';t_0}$ を得る. また直接計算によって $[-G_{t_j}^{(0);t_0}]_+ = -H_{t_j}^{(0);t_0}$ が任意の j についてわかるので, (3.2.28) が得られる. \square

注 3.2.12. 命題 3.2.11 は [FZ07] において予想として与えられていた (Conjecture 6.10) ものであり, 上記の証明によってこの予想は解決された.

3.3 F 行列とその自己双対性

F 多項式から構成される行列を考えることになった最初のモチベーションは, 2.3 節で与えられた F 多項式の変異から誘導される関係式 (2.2.8) と 3.1 節で与えられた F 多項式の後方変異から誘導される関係式 (3.1.25) の関係性を考える点にあった. 既に C 行列と G 行列の変異と後方変異の間にある関係性, すなわち等式 (3.2.4), (3.2.5) と (3.2.24), (3.2.25) がトロピカル双対性を通して結びついていることが [NZ12] により指摘されており, 著者はこのような関係が非トロピカル部分である F 多項式にも存在するのではないかと推測していた. (2.2.8) と (3.1.25) の式の形は C 行列と G 行列の場合ほど単純ではないので, この 2 式を比較するには F 多項式の「本質的な」一部分を切り取る必要があると考え, 次の F 行列を定義するに至った.

定義 3.3.1 ([FG18, Proposition 2.6]). B を t_0 における初期交換行列とする. 任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ と $t \in \mathbb{T}_n$ について, $f_{1i;t}^{B;t_0}, \dots, f_{ni;t}^{B;t_0}$ を i 番目の F 多項式 $F_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ における \mathbf{y} の最大冪であると

する. このとき, 非負整数ベクトル $\mathbf{f}_{i;t}^{B;t_0} = \begin{bmatrix} f_{1i;t}^{B;t_0} \\ \vdots \\ f_{ni;t}^{B;t_0} \end{bmatrix}$ を t における \mathbf{f} ベクトル (\mathbf{f} -vector) と呼び,

$\mathbf{f}_{1;t}^{B;t_0}, \dots, \mathbf{f}_{n;t}^{B;t_0}$ を順に横に並べた $n \times n$ 行列 $F_t^{B;t_0}$ を t における F 行列 (F -matrix) という。

この行列が F 多項式の「本質的」な一部分であるかどうか、という議論については後で行うとして、まずはこの行列が満たす性質について見ていくことにする。まず、 F 多項式の変異から誘導される関係式 (2.2.8) から直ちに F 行列についての次の関係式が得られる：

$$F_{t'}^{B;t_0} = F_t^{B;t_0} J_\ell + \max([C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell} + F_t^{B;t_0} [B_t]_+^{\bullet\ell}, [-C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell} + F_t^{B;t_0} [-B_t]_+^{\bullet\ell}). \quad (3.3.1)$$

この式を、 C 行列や G 行列のように B に符号 ε の自由度がある形に書き直すことを考える。そこで次の命題が有用である：

命題 3.3.2 ([FG18, Proposition 2.8]). 任意の歪対称化可能行列 B と任意の $t_0, t \in \mathbb{T}_n$ について、次が成り立つ：

$$C_t^{-B;t_0} = C_t^{B;t_0} + F_t^{B;t_0} B_t. \quad (3.3.2)$$

証明. $\{\Sigma_t^B = (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ を、 \mathbb{P} を係数に持ち $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ を初期シードとして持つ団パターンとする。同様に、 $\{\Sigma_t^{-B} = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{y}'_t, B'_t)\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ を \mathbb{P} を係数に持ち $(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{-1}, -B)$ を初期シードとして持つ団パターンとする。このとき、変異の定義 (2.1.6), (2.1.7), (2.1.8) から

$$\mathbf{x}'_t = \mathbf{x}_t, \quad \mathbf{y}'_t = \mathbf{y}_t^{-1}, \quad B'_t = -B_t \quad (3.3.3)$$

を得る ([FZ07, Proof of Proposition 5.3] も参照)。また、初期シード $\Sigma_{t_0}^{-B} = (\mathbf{x}', \mathbf{y}', B') = (\mathbf{x}, \mathbf{y}^{-1}, -B)$ について、

$$\hat{y}_i' := y_i' \prod_{j=1}^n x_j^{b'_{ji}} = y_i^{-1} \prod_{j=1}^n x_j^{-b_{ji}} = \hat{y}_i^{-1} \quad (3.3.4)$$

が成立することにも注意しておく。 $\mathbb{P} = \text{Trop}(y_1^{-1}, \dots, y_n^{-1})$ として (2.3.18) を (3.3.3) に適用することで、

$$\left(\prod_{k=1}^n (y_k^{-1})^{c_{kj;t}^{-B;t_0}} \right)^{-1} = \prod_{k=1}^n y_k^{c_{kj;t}^{B;t_0}} \prod_{k=1}^n (F_{k;t}^{B;t_0} |_{\text{Trop}(y_1^{-1}, \dots, y_n^{-1})}(\mathbf{y}))^{b_{kj;t}}, \quad (3.3.5)$$

となる。(3.3.5) の各 y_i の指数を比較することで、

$$\mathbf{c}_{j;t}^{-B;t_0} = \mathbf{c}_{j;t}^{B;t_0} + \sum_{i=1}^n b_{ij;t} \mathbf{f}_{i;t}^{B;t_0} \quad (3.3.6)$$

となり、(3.3.2) を得る。□

この式によって、(3.3.1) は次のように変形される：

命題 3.3.3 ([FG18, Proposition 2.9]). $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする。任意の $t \xrightarrow{\ell} t' \in \mathbb{T}_n$ に対して、 $F_t^{B;t_0}$ と $F_{t'}^{B;t_0}$ は次の関係式を持つ：

$$F_{t'}^{B;t_0} = F_t^{B;t_0} (J_\ell + [-\varepsilon B_t]_+^{\bullet\ell}) + [-\varepsilon C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell} + [\varepsilon C_t^{-B;t_0}]_+^{\bullet\ell}. \quad (3.3.7)$$

証明. まず (3.3.7) において $\varepsilon = 1$ の場合を示す. $b = [b]_+ - [-b]_+$ であることに注意すると, (3.3.1) と (3.3.2) により,

$$\begin{aligned} F_{t'}^{B;t_0} &= F_t^{B;t_0}(J_\ell + [-B_t]_+^{\bullet\ell}) + \max([C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell} + F_t^{B;t_0} B_t^{\bullet\ell}, [-C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell}) \\ &= F_t^{B;t_0}(J_\ell + [-B_t]_+^{\bullet\ell}) + \max([C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell} + (C_t^{-B;t_0})^{\bullet\ell} - (C_t^{B;t_0})^{\bullet\ell}, [-C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell}) \\ &= F_t^{B;t_0}(J_\ell + [-B_t]_+^{\bullet\ell}) + \max([-C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell} + (C_t^{-B;t_0})^{\bullet\ell}, [-C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell}) \\ &= F_t^{B;t_0}(J_\ell + [-B_t]_+^{\bullet\ell}) + [-C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell} + [C_t^{-B;t_0}]_+^{\bullet\ell} \end{aligned}$$

となり求めたい等式が示された. 同様に $\varepsilon = -1$ のとき,

$$\begin{aligned} F_{t'}^{B;t_0} &= F_t^{B;t_0}(J_\ell + [B_t]_+^{\bullet\ell}) + \max([C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell}, [-C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell} - F_t^{B;t_0} B_t^{\bullet\ell}) \\ &= F_t^{B;t_0}(J_\ell + [B_t]_+^{\bullet\ell}) + \max([C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell}, [C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell} - (C_t^{-B;t_0})^{\bullet\ell}) \\ &= F_t^{B;t_0}(J_\ell + [B_t]_+^{\bullet\ell}) + [C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet\ell} + [-C_t^{-B;t_0}]_+^{\bullet\ell} \end{aligned}$$

となって示された. □

ここへ C 行列の符号同一性を適用することで, 右辺の後ろの 2 つの項のどちらかを消すことができる:

命題 3.3.4 ([FG18, Proposition 2.16]). $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする. 任意の $t \xrightarrow{\ell} t' \in \mathbb{T}_n$ に対して, $F_t^{B;t_0}$ と $F_{t'}^{B;t_0}$ は次の関係式を持つ:

$$F_{t'}^{B;t_0} = F_t^{B;t_0}(J_\ell + [\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{-\varepsilon B;t_0})(\varepsilon B_t)]_+^{\bullet\ell}) + [\varepsilon_{\bullet\ell}(C_t^{-\varepsilon B;t_0})C_t^{\varepsilon B;t_0}]_+^{\bullet\ell}. \quad (3.3.8)$$

次に, 後方変異 (3.1.25) から誘導される F 行列の関係式を見てみよう. まず直接計算により (3.1.25) から

$$F_t^{B_1;t_1} = (J_\ell + [\varepsilon B]_+^{\ell\bullet})F_t^{B;t_0} + (\varepsilon G_t^{B;t_0})^{\ell\bullet} - H_t^{-B;t_0}(\varepsilon)^{\ell\bullet} - H_t^{B;t_0}(\varepsilon)^{\ell\bullet} \quad (3.3.9)$$

$$= (J_\ell + [-\varepsilon B]_+^{\ell\bullet})F_t^{B;t_0} + (\varepsilon G_t^{-B;t_0})^{\ell\bullet} - H_t^{-B;t_0}(\varepsilon)^{\ell\bullet} - H_t^{B;t_0}(\varepsilon)^{\ell\bullet}. \quad (3.3.10)$$

を得る. 2 つの等式のどちらで考えても本質的な違いはないので, (3.3.9) で考えることにする. この式は C 行列, G 行列の H 行列を含んだ形の関係式 (3.2.26), (3.2.27) と似ているので, 最終的にこの H 行列を消去した形である (3.2.24) または (3.2.25) に類似した形を目指そうという発想は自然であろう. そこで, 命題 3.2.11 を用いることで,

$$F_t^{B_1;t_1} = (J_\ell + [\varepsilon B]_+^{\ell\bullet})F_t^{B;t_0} + [-\varepsilon G_t^{-B;t_0}]_+^{\ell\bullet} + [\varepsilon G_t^{B;t_0}]_+^{\ell\bullet}. \quad (3.3.11)$$

を得る. ここに G の符号同一性を適用することで, 次の命題を得る:

命題 3.3.5 ([FG18, Proposition 3.9]). $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする. 任意の $t_0 \xrightarrow{\ell} t_1 \in \mathbb{T}_n$ に対して, $F_{t_0}^{B;t_0}$ と $F_{t_1}^{B_1;t_1}$ は次の関係式を持つ:

$$F_{t_1}^{B_1;t_1} = (J_k + [\varepsilon_k \bullet (G_t^{-\varepsilon B;t_0})(\varepsilon B)]_+^{k\bullet})F_{t_0}^{B;t_0} + [\varepsilon_k \bullet (G_t^{-\varepsilon B;t_0})G_t^{\varepsilon B;t_0}]_+^{k\bullet}. \quad (3.3.12)$$

(3.3.8) と (3.3.12) にトロピカル双対性 (3.2.21) を適用することで, 次の定理を得る. この定理がこの章の主定理である:

定理 3.3.6 ([FG18, Theorem 3.10]). 任意の交換行列 B と $t_0, t \in \mathbb{T}_n$ について, 次の等式が成立:

$$(F_t^{B;t_0})^T = F_{t_0}^{B^T;t}. \quad (3.3.13)$$

証明. 等式 (3.3.13) を t と t_0 の \mathbb{T}_n 上の距離による帰納法で示す. $t = t_0$ のとき, $(F_t^{B;t_0})^T = O = F_{t_0}^{B^T;t}$ なので (3.3.13) を満たす. (3.3.13) がある $t \in \mathbb{T}_n$, で成立しているとき, $t \xrightarrow{\ell} t'$ を満たす t' についても成立することを示す. 帰納法の仮定, (3.3.8), (3.3.12), (3.2.21) を用いることにより,

$$\begin{aligned} (F_{t'}^{B;t_0})^T &= (J_\ell + [\varepsilon_\ell \bullet (G_{t_0}^{-B^T;t}) B_t^T]_{\ell \bullet}) (F_t^{B;t_0})^T + [\varepsilon_\ell \bullet (G_{t_0}^{-B^T;t}) G_{t_0}^{B^T;t}]_{\ell \bullet} \\ &= (J_\ell + [\varepsilon_\ell \bullet (G_{t_0}^{-B^T;t}) B_t^T]_{\ell \bullet}) F_{t_0}^{B^T;t} + [\varepsilon_\ell \bullet (G_{t_0}^{-B^T;t}) G_{t_0}^{B^T;t}]_{\ell \bullet} \\ &= F_{t_0}^{B^T;t'} \end{aligned}$$

となって (3.3.13) を得る. □

形を見るとわかる通り, この等式はトロピカル双対性の等式 (3.2.21) の C 行列と G 行列を両者とも F 行列に変えたものとなっており, 強い類似性が窺える. 我々は, これを **F 行列の自己双対性**, または**非トロピカル双対性** (*nontropical duality*) と呼ぶことにした. このように, そのままでは見えにくい F 多項式の変異と後方変異の関係性であるが, 最大冪による行列をとることで, 実は C 行列と G 行列の間に成り立つような双対性が存在することが明らかになった.

注 3.3.7. \mathbf{f} ベクトルは F 多項式における各 y_i における最大冪として定義したが, 実はこの最大冪は F 多項式の係数が 1 であるようなある 1 つの項にすべて現れる. これは C 行列の符号同一性の同値条件として知られている ([FZ07, Conjecture 5.5, Proposition 5.6]).

よって, \mathbf{f} ベクトルは次のようにも定義できることがわかる.

系 3.3.8. $\mathbf{f}_{i;t}^{B;t_0}$ は $F_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ の (普通多項式次数の意味で) 次数を与える一意的な単項式における y_i たちの指数ベクトルである. 言い換えると, $F_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ の次数を与える一意的な単項式は $y_1^{f_{1;i;t}^{B;t_0}} \dots y_n^{f_{n;i;t}^{B;t_0}}$ である.

3.4 双対定理の具体例

最後に, A_2 型における C 行列, 具体例を見ることにしよう. $n = 2$ とし, 次のようにラベルづけされた \mathbb{T}_2 を考える:

$$\dots \xrightarrow{1} t_0 \xrightarrow{2} t_1 \xrightarrow{1} t_2 \xrightarrow{2} t_3 \xrightarrow{1} t_4 \xrightarrow{2} t_5 \xrightarrow{1} \dots$$

t_0 における初期交換行列を $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ とする. このとき, この団パターンにおける係数, 団変数は表 3.1 のように, C 行列, G 行列, F 行列は表 3.2 のようになる [FZ07, Example 2.10].

一方, これに対応する, 後方変異によって得られる係数, 団変数の t_0 における有理関数表示を図 3.3 に, それらに付随する C 行列, G 行列, F 行列を表 3.4 に記した. 特に, 表 3.2 と表 3.4 の C 行列, G 行列の間と, F 行列同士の間とに転置の関係があることがわかる.

表 3.1 A_2 型の係数と団変数の例

t	$\mathcal{Y}_t^{B;t_0}$		$\mathcal{X}_t^{B;t_0}$	
0	y_1	y_2	x_1	x_2
1	$y_1(y_2 \oplus 1)$	$\frac{1}{y_2}$	x_1	$\frac{x_1 y_2 + 1}{(y_2 \oplus 1)x_2}$
2	$\frac{1}{y_1(y_2 \oplus 1)}$	$\frac{y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1}{y_2}$	$\frac{x_1 y_1 y_2 + y_1 + x_2}{(y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1)x_1 x_2}$	$\frac{x_1 y_2 + 1}{(y_2 \oplus 1)x_2}$
3	$\frac{y_1 \oplus 1}{y_1 y_2}$	$\frac{y_2}{y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1}$	$\frac{x_1 y_1 y_2 + y_1 + x_2}{(y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1)x_1 x_2}$	$\frac{y_1 + x_2}{x_1(y_1 \oplus 1)}$
4	$\frac{y_1 y_2}{y_1 \oplus 1}$	$\frac{1}{y_1}$	x_2	$\frac{y_1 + x_2}{x_1(y_1 \oplus 1)}$
5	y_2	y_1	x_2	x_1

表 3.2 A_2 型の C 行列, G 行列, F 行列の例

t	$C_t^{B;t_0}$	$G_t^{B;t_0}$	$F_t^{B;t_0}$
0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

表 3.3 A_2 型の t_0 における係数, 団変数の有理関数表示の例

t	$\mathcal{Y}_{t_0}^{B_t^T;t}$		$\mathcal{X}_{t_0}^{B_t^T;t}$	
0	y_1	y_2	x_1	x_2
1	$y_1(y_2 \oplus 1)$	$\frac{1}{y_2}$	x_1	$\frac{y_2 x_1 + 1}{(y_2 \oplus 1)x_2}$
2	$\frac{y_1 y_2 \oplus y_2 \oplus 1}{y_1}$	$\frac{1}{y_2(y_1 \oplus 1)}$	$\frac{y_1 x_2 + 1}{(y_1 \oplus 1)x_1}$	$\frac{y_1 y_2 x_2 + y_2 + x_1}{(y_1 y_2 \oplus y_2 \oplus 1)x_1 x_2}$
3	$\frac{y_1 \oplus 1}{y_1 y_2}$	$\frac{y_2}{y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1}$	$\frac{y_1 y_2 x_1 + y_1 + x_2}{(y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1)x_1 x_2}$	$\frac{y_1 + x_2}{(y_1 \oplus 1)x_1}$
4	$\frac{1}{y_2}$	$\frac{y_1 y_2}{y_2 \oplus 1}$	$\frac{y_2 + x_1}{(y_2 \oplus 1)x_2}$	x_1
5	y_2	y_1	x_2	x_1

表 3.4 A_2 型の C 行列, G 行列, F 行列の例 (後方変異による遷移)

t	$C_{t_0}^{B_t^T;t}$	$G_{t_0}^{B_t^T;t}$	$F_{t_0}^{B_t^T;t}$
0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

第 4 章

F 行列の一意性予想と復元問題

注 3.3.7 と系 3.3.8 で見たように, F 行列は F 多項式の次数を与える項から定義される行列である. すなわち, F 多項式から F 行列を定義する際に, F 多項式の最高次数を与える項以外の項の情報は全て切り捨てていることになる. F 多項式は一般に大量の項を持つ多項式である. たと

えば SageMath[S+09] を用いた計算によると, 初期交換行列を $B = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -8 \\ -8 & 0 & 8 \\ 8 & -8 & 0 \end{bmatrix}$ としたとき,

$t = \mu_3\mu_2\mu_1(t_0)$ とたった 3 回変異をするだけで 3 番目の F 多項式 $F_{3;t}(\mathbf{y})$ の項の数は 13266 にもなる. すなわち, 情報量としては相当な量が切り捨てられていることになる. もしこの最高次数を与える項が F 多項式にとって枝葉末節な情報でしかないのだとしたら, この行列の性質を考える意味も薄いであろう. そこでこの章では, 前章で議論を後回しにした F 行列が F 多項式の「本質的な」情報であるか, という点について考える. ここでいう F 多項式の「本質的な」情報とは, F 多項式を一意に決定できるだけの情報, という意味である.

予想 4.0.1. t, s を \mathbb{T} の頂点とする. このとき,

$$F_t^{B;t_0} = F_s^{B;t_0} \Rightarrow \left(F_{1;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}), \dots, F_{n;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}) \right) = \left(F_{1;s}^{B;t_0}(\mathbf{y}), \dots, F_{n;s}^{B;t_0}(\mathbf{y}) \right) \quad (4.0.1)$$

が成立する.

この予想より少し弱い, 次の形を考える:

予想 4.0.2. t, t' を \mathbb{T} の頂点とする. このとき,

$$F_t^{B;t_0} = F_{t'}^{B;t_0} \Rightarrow \{F_{1;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}), \dots, F_{n;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})\} = \{F_{1;t'}^{B;t_0}(\mathbf{y}), \dots, F_{n;t'}^{B;t_0}(\mathbf{y})\} \quad (4.0.2)$$

が成立する.

注 4.0.3. 予想 4.0.1 と 4.0.2 の違いは F 多項式の順番を考慮するかどうかという点にある. 例えば, $\mathbf{f}_{i;t}^{B;t_0} = \mathbf{f}_{j;t}^{B;t_0}$ かつ $F_i^{B;t_0}(\mathbf{y}) \neq F_j^{B;t_0}(\mathbf{y})$ という組み合わせが存在するときに, 予想 4.0.1 においては 2 つの F 多項式のどちらが i 番目の \mathbf{f} ベクトルに対応するかということまで要求するが, 予想 4.0.2 においては要求しない.

さらに予想 4.0.1 または 4.0.2 が成り立つクラスについてはより具体的に, 次の問題を考える.

問題 4.0.4. 初期交換行列と B と F 行列が与えられたとき、そこから F 多項式を復元する公式あるいはアルゴリズムは存在するか。

これらが解決されることにより、団変数と係数は $\{B_t\}_{t \in \mathbb{T}}$, $\{C_t^{B;t_0}\}_{t \in \mathbb{T}}$, $\{G_t^{B;t_0}\}_{t \in \mathbb{T}}$, $\{F_t^{B;t_0}\}_{t \in \mathbb{T}}$ で表現されることになり、団代数において F 行列を考える重要性が保証されることになる。著者は、この問題、特に予想 4.0.2 と問題 4.0.4 を、百合草寿哉とともに 2.4 節で導入した点付曲面から誘導されるクラスの団代数において解決した (定理 4.2.6)。これが第 1 章で紹介した定理 B の内容に他ならない。この章の内容は共著論文 [GY] をもとに構成した。

4.1 交点数と弧

まず、点付曲面の方でいくつか準備を行う。タグ付弧について、弧の両端のタグが両方ともプレーンである場合その弧を**プレーン弧** (*plain arc*), 片方がノッチ, 片方がプレーンである場合を**1 ノッチ弧** (*1-notched arc*), 両方ともノッチである場合を**2 ノッチ弧** (*2-notched arc*) と呼ぶことにする。 (\mathbf{S}, \mathbf{M}) を任意に固定する。 δ と ϵ を $\bar{\delta} = \bar{\epsilon}$ を満たすタグ付弧で、どちらか一方が 1 ノッチ弧であるとき、この組 (δ, ϵ) を**共役な弧の組** (*pair of conjugate arcs*) という (図 4.1)。



図 4.1 共役な弧の組 (δ, ϵ)

定義 4.1.1 ([QZ17, Definition 3.3]). 任意の (\mathbf{S}, \mathbf{M}) の弧 δ と ϵ に対して、 δ と ϵ の**交点数** (*intersection number*) を次のように定義する: δ と ϵ の道ホモトピーで交差数が最小の組を δ_0 と ϵ_0 とする。 $\text{Int}(\delta, \epsilon) = A + B + C$ が交点数である。ただし、

- A は δ_0 と ϵ_0 の $\mathbf{S} \setminus \mathbf{M}$ における交差数,
- B は δ_0 と ϵ_0 の共通の端点側の端におけるタグが一致しているものの個数,
- C は δ と ϵ が共役な弧の組ならば -1 , それ以外の時 0

である。

注 4.1.2. これは [FST08, Definition 8.4] で定義される交点数 (*intersection number*) $(\delta|\epsilon)$ とは微妙に異なることに注意する。また、定義から δ と ϵ が整合的であることと $\text{Int}(\delta, \epsilon) = 0$ は同値である。

交点数を用いて、タグ付弧とタグ付三角形分割との間に定まる交点ベクトル、タグ付三角形分割の間に定まる交点行列を定義する。

定義 4.1.3 ([GY]). (\mathbf{S}, \mathbf{M}) のタグ付弧 δ とタグ付三角形分割 $T, T' = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ について、

$$\text{Int}(T, \delta) := (\text{Int}(t, \delta))_{t \in T} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, \quad (4.1.1)$$

$$\text{Int}(T, T') := (\text{Int}(T, \delta_1) \cdots \text{Int}(T, \delta_n)) \in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (4.1.2)$$

とする。 (\mathbf{S}, \mathbf{M}) の任意のタグ付弧 δ に対して、 T との**交点ベクトル** (*intersection vector*) を

$\text{Int}(T, \delta) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ で、任意のタグ付三角形分割 T' に対して T との**交点行列** (*intersection matrix*) を $\text{Int}(T, T') \in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ で定義する.

注 4.1.4. 交点数は可換である、すなわち $\text{Int}(\delta, \epsilon) = \text{Int}(\epsilon, \delta)$ であるが、交点行列は可換ではない。実際、定義から $\text{Int}(T', T)$ と $\text{Int}(T, T')$ は互いに転置の関係にある。

これ以降、 T を初期タグ付三角形分割とする。さらに、 T に関して次の条件を仮定する：

仮定 4.1.5. (S, M) が 4 点付球面であるとき、タグ付三角形分割 T は 3 つの共役な弧の組から構成されない。すなわち、 T が第 2 章の図 2.3 にある三角形分割でない。

この仮定は、三角形分割をパズル片に分けて考えるために必要な仮定である。次の定理が、この章の主定理を示すために最も重要な定理である。

定理 4.1.6 ([GY]). T' と T'' を (S, M) のタグ付三角形分割とする。このとき、 $\text{Int}(T, T') = \text{Int}(T, T'')$ ならば $T' = T''$ である。

証明は 4.4 節で行う。

タグ付弧 δ と穴 p について、 δ が p を端点として持つとき、 $\delta^{(p)}$ を δ の p のタグを変えることによって得られるタグ付弧とする。 δ が穴 p を端点として持たないときは $\delta^{(p)} = \delta$ であるとする。定義から δ, ϵ と p について $\text{Int}(\delta^{(p)}, \epsilon^{(p)}) = \text{Int}(\delta, \epsilon)$ が成立する。 T に関する交点ベクトルや交点行列を考えるときは T に含まれる弧のタグを変えることによって次を仮定して一般性を失わない：

仮定 4.1.7. T はプレーン弧もしくは 1 ノッチ弧からなり、各穴につき高々 1 つの 1 ノッチ弧が繋がっている。

さて、仮定 4.1.5 と 4.1.7 により、タグ付三角形分割 T は図 4.2 に示す 3 種類のパズル片を複数用いた貼り合わせによって得られる。ここで図 4.2 中の各パズル片の辺を、 τ_i で表すことにする。

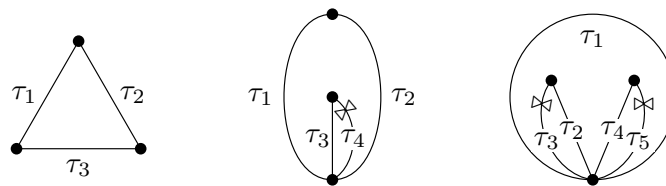


図 4.2 3 つのパズル片 (三角片, 1 孔片, 2 孔片)

我々は定理 4.1.6 を第 2 章注 2.4.4 を用いて個々のパズル片に帰着させるという手法を用いて示す。仮定 4.1.7 はそのための仮定である。ただし、この仮定を外した場合においても定理 4.1.6 が成立することが予想される。

予想 4.1.8. 仮定 4.1.5 を外しても定理 4.1.6 が成立する。

4.2 点付き曲面における団展開公式

この節では、点付き曲面における団展開公式を用いて、4.1 節で定義した交点行列と 3.3 節で定義した F 行列が、曲面とそこから誘導される団代数の対応において同一の行列であることを説明する。団展開公式は、[MSW13] によって与えられた、弧を元に、その弧に付随する団の初期団変数による表示を組み合わせた論的に与えた公式のことである。本論文においては、目的の都合上、[MSW13] を元に別の形での公式を構成した [Yur18] に沿って説明する。まず T に含まれる 1 ノッチ弧を、プレーンタグがついている側を端点とし、ノッチタグがついている側の頂点を囲むようなループ（これはタグ付弧でないことに注意）に置き換えたものを T^0 とする。まず、 δ に付随するタグ付三角形分割された多角形 T_δ を次のように定義する。

τ_1, \dots, τ_n を、 γ と T^0 の交点とする。ここで、添え字は交わる順につけていくものとする（この場合の g の向きはどちらでも良い）。同じ弧に 2 度以上交わることもあるので、 $\tau_i = \tau_j$ かつ $i \neq j$ である場合も認める。したがって、 γ は $n + 1$ 個の三角形 $\Delta_0, \dots, \Delta_n$ と順番に交わることになる。まず、全ての三角形が共有辺を持たない場合を考える。このとき、 $i \in [0, n]$ に対して、 $\Delta_{\gamma, i}$ を Δ_i のコピーとする。すなわち、 $\Delta_{\gamma, i}$ は τ_i と τ_{i+1} を含む辺を持つ。（ τ_1 は $i = 0$ の、 τ_n は $i = n$ の三角形 Δ_i のみに含まれる）。このとき、 T_γ を τ_i を持つ三角形同士を τ_i を持つ辺で貼り合わせた $(n + 3)$ 角形とする。同様に、共有辺を持つ三角形がないとき $T_{\gamma(p)}$ を T_γ に p を端点を持つ三角形を全て貼り合わせたものとする。 $T_{\gamma(p,q)}$ も同様である（図 4.2）。 γ が共有辺を持つ三角形を通るか端点 p または q に共有辺を持つ三角形が存在するとき、図 4.2 にあるような局所変換を三角形に対してあらかじめ施してから同様の貼り合わせを行う。仮定 4.1.7 より、図 4.2 の中央の δ の端がノッチタグになっている場合は考えなくて良い。

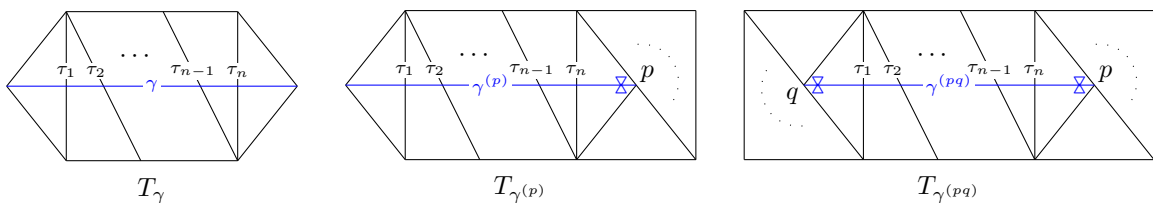


図 4.3 δ に付随するタグ付三角形分割された多角形 T_δ

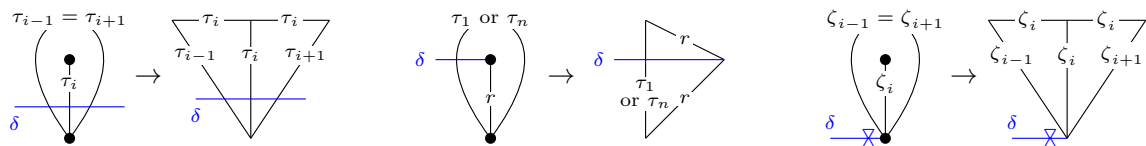


図 4.4 共有辺を持つ三角形の置き換え

定義 4.2.1 ([Yur18, Definition 1.2]). T_δ における**角のパーフェクトマッチング** (*perfect matching of angles*) を次のような印付き角の選び方とする：

- (1) 任意の頂点 v について, v を端点とする角のうち少なくとも 1 つの角が印付き角である.
(2) T_δ のそれぞれの三角形はちょうど 1 つ印付き角を持つ.

T_δ の角のパーフェクトマッチング全体の集合を $\mathbb{A}(T_\delta)$ とする.

$\mathbb{A}(T_\delta) \neq \emptyset$ であることは容易にわかる (図 4.2 参照).

T_δ の対角線または境界の切片 τ について, τ が T の境界でない切片 τ' に対応するとき, $x_\tau = x_{\tau'}$ とし, それ以外の場合は $x_\tau = 1$ とする. T_δ の角 a に対して, $x_a := x_\tau$ とする. ここで τ は a を含む三角形において a の反対側にある辺とする. 仮定 4.1.7 を用いることで, 次の環準同型が定まる.

$$\Phi : \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] \quad (4.2.1)$$

ただし, 任意の $j \in \{1, \dots, n\}$ に対して

$$\Phi(x_j) := \begin{cases} x_j x_k & (j \text{ が } 1 \text{ ノッチ弧, } k \text{ は } j \text{ と共役な } T \text{ の弧}) \\ x_j & (\text{それ以外}), \end{cases}$$

とする. まず, $\mathbb{P} = \{1\}$ の場合の団代数についての展開公式を与える.

定理 4.2.2 ([Yur18, Theorem 1.3]). δ を (\mathbf{S}, \mathbf{M}) のタグ付弧とする.

- (1) $\bar{\delta} \notin T$ であるとき,

$$x_\delta = \Phi \left(\frac{1}{\text{cross}(T, \delta)} \sum_{A \in \mathbb{A}(T_\delta)} x(A) \right), \quad \text{ただし, } \text{cross}(T, \delta) := \prod_{\tau \in T_\delta} x_\tau \quad \text{かつ} \quad x(A) := \prod_{a \in A} x_a.$$

- (2) $\bar{\delta} \in T$ かつ $\delta \notin T$ を仮定する. p と q を $\bar{\delta}$ の端点とする. p が穴であるとき, q を端点とするループで p のみを囲むものを ℓ_p とかくことにする (ℓ_q も同様). このとき, T_{ℓ_p} と T_{ℓ_q} をプレーン弧と同様に定める. このとき, $s = p$ または q に対して, 次の等式が成立する:

$$x_\delta = \begin{cases} \frac{x_{\ell_s}}{x_{\bar{\delta}}} & (\delta = \bar{\delta}^{(s)}) \\ \frac{x_{\ell_p} x_{\ell_q} + 1}{x_{\bar{\delta}}} & (\delta = \bar{\delta}^{(pq)}) \end{cases} \quad \text{ただし } x_{\ell_s} = \Phi \left(\frac{1}{\text{cross}(T, \ell_s)} \sum_{A \in \mathbb{A}(T_{\ell_s})} x(A) \right).$$

次に主係数を持つ場合に定理 4.2.2 を拡張する. ζ_1, \dots, ζ_m を p を端点を持つ T_δ の対角線, ξ_1, \dots, ξ_ℓ を T_δ の q を端点を持つ対角線とする. ここで, 番号のつけ方はそれぞれ τ_n を基準にして反時計回り, τ_1 を基準にして反時計回りについているものとする (図 4.2 参照). T_δ の**最小マッチング** (*minimal matching*) $A_-(T_\delta) \in \mathbb{A}(T_\delta)$ を次の**最小条件** (*min-condition*) を満たす角のパーフェクトマッチングとする: T_δ の境界に存在する頂点 v に対して, v を端点とする角のうち, 反時計回りにみて一番最初にくる角のみが印つき角である. 最小マッチングは一意的に定まる. (図 4.2 参照).

このとき, 環準同型 (4.2.1) を次のように拡張する:

$$\Phi : \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]$$

ただし, 任意の $j \in \{1, \dots, n\}$ に対して,

$$\Phi(y_j) := \begin{cases} \frac{y_j}{y_k} & (j \in T \text{ がプレーン弧で, } j \text{ と共役な弧 } k \in T \text{ が存在する場合}) \\ y_j & (\text{それ以外}), \end{cases}$$

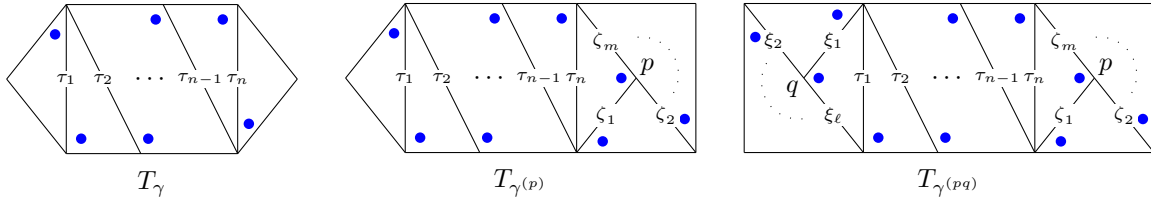


図 4.5 最小マッチング

2つの集合 A と B について, $A\Delta B$ を対称差 $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ とする. T_δ の外角 (*exterior angle*) を境界切片と T_δ の対角線のなす角とする. A を $\mathbb{A}(T_\delta)$ の元とする. $Y'(A)$ を T_δ の対角線で $A \setminus (T_\delta) \Delta A$ の少なくとも1つの外角を構成するもの全体の集合とする. このとき, 集合 $Y(A)$ を次で定義する:

$$Y(A) := \begin{cases} Y'(A) \sqcup \{\tau_1\} & \left(\begin{array}{l} \delta = \gamma^{(pq)}, n = 1 \text{ かつ } A \text{ が } \zeta_m \text{ または } \xi_\ell \text{ と } \tau_1 \text{ または } T_{\gamma^{(pq)}} \text{ の} \\ \text{境界切片の間の4つの角のうち少なくとも1つを含んでいる} \end{array} \right) \\ Y'(A) & \text{(それ以外)} \end{cases}$$

定理 4.2.3 ([Yur18, Theorem 1.5]). δ を (\mathbf{S}, \mathbf{M}) のタグ付弧とする.

(1) $\bar{\delta} \notin T$ のとき,

$$x_\delta = \Phi \left(\frac{1}{\text{cross}(T, \delta)} \sum_{A \in \mathbb{A}(T_\delta)} x(A)y(A) \right), \text{ ただし, } y(A) := \prod_{\tau \in Y(A)} y_\tau.$$

(2) $\bar{\delta} \in T$ と $\delta \notin T$ を仮定する. r と s を $\bar{\delta}$ の端点としたとき, $s = p$ または q について,

$$x_\delta = \begin{cases} \frac{x_{\ell_s}}{x_{\bar{\delta}}} & (\delta = \bar{\delta}^{(s)}), \\ \frac{x_{\ell_p} x_{\ell_q} y_{\bar{\delta}} + (1 - \prod_{\tau \in T} y_\tau^{e_p(\tau)})(1 - \prod_{\tau \in T} y_\tau^{e_q(\tau)})}{x_{\bar{\delta}}} & (\delta = \bar{\delta}^{(pq)}), \end{cases}$$

ここで, $e_s(\tau)$ は s につながっている τ の端の数である. また,

$$x_{\ell_s} = \Phi \left(\frac{1}{\text{cross}(T, \ell_s)} \sum_{A \in \mathbb{A}(T_{\ell_s})} x(A)y(A) \right)$$

である.

定理 4.2.2, 4.2.3 の証明は紙数の都合上省略する. F 多項式の最大次数項を考えよう. いま, x_δ から得られる F 多項式を $F_\delta(\mathbf{y})$ とすると, F 多項式の定義から

$$F_\delta(\mathbf{y}) = \Phi \left(\sum_{A \in \mathbb{A}(T_\delta)} y(A) \right) \quad (4.2.2)$$

である. よって, $Y(A)$ として全ての T_δ の対角線を取ってくることであればそれが最大次数項を与えることになる. そして, $Y(A)$ がそうなるような角のパーフェクトマッチングのとり方は実際に

存在する. A として, 最小マッチングとは逆に, T_δ の境界に存在する頂点 v に対して, v を端点とする角のうち, 時計回りにみて一番最初にくる角のみを印つき角としてとればよい. すなわち, A を図 4.2 のようにとる: よって, x_δ の \mathbf{f} ベクトル \mathbf{f}_δ の第 i 成分を $f_{\delta,i}$ とすると, 注 3.3.7 より

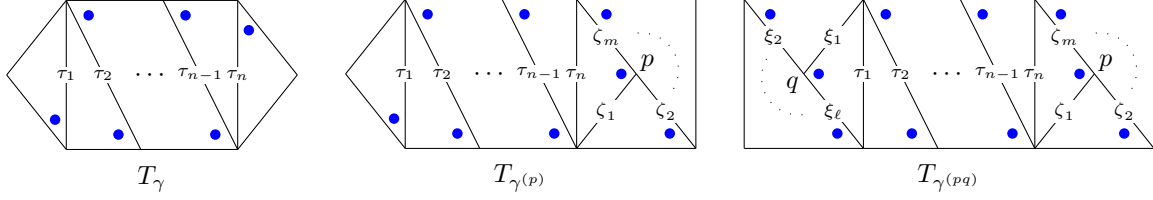


図 4.6 最大次数項を与える角のマッチング

$$\prod_i y_i^{f_{\delta,i}} = \Phi \left(\prod_{\tau \in T_\delta} y_\tau \right)$$

となる. このことから, 次の定理が成立する:

定理 4.2.4 ([Yur18, Theorem 1.8]). (\mathbf{S}, \mathbf{M}) とそのタグ付三角形分割 T をにおける任意のタグ付き弧 δ について, 定理 2.4.10 を通して対応する団変数から得られる \mathbf{f} ベクトルを \mathbf{f}_δ とする. このとき, $\mathbf{f}_\delta = \text{Int}(T, \delta)$ が成立する. 特に, タグ付三角形分割 T' に対応する団から得られる F 行列を $F_{T'}$ とすると, $F_{T'} = \text{Int}(T, T')$ が成立する.

証明. それぞれの場合を確認することにより, $f_{x_\delta,i}$ と $\text{Int}(\delta, i)$ は次のような $f \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に等しいことがわかる. $\delta \in T$ であるときは $f = 0$ であることは明らかである. $\bar{\delta} \notin T$ の場合を考える. i が T のプレーン弧であるとき, f は i に対応する T_δ の対角線の数である. i が T の 1 ノッチ弧であるとき, f は i に対応する T_δ の対角線の数から \bar{i} に対応する T_δ の対角線の数引いたものである (T^0 では i はループなので, T 上で i を 1 回通過するとき T_δ では 2 回通過していることになる. これを 1 回に修正する操作である). $\bar{\delta} \in T$ かつ $\delta \notin T$ の場合を考える. もし $\delta = \bar{\delta}^{(s)}$ ならば $f = e_s(i) - \delta_{i\bar{\delta}}$, ただし $\delta_{i\bar{\delta}}$ はクロネッカーのデルタである. $\delta = \bar{\delta}^{(pq)}$ であるとき, $f = e_p(i) + e_q(i)$ である. \square

この対応と定理 4.1.6 から, 次の定理が直ちに従う. この定理がこの章の主定理である:

定理 4.2.5 ([GY]). T' と T'' を (\mathbf{S}, \mathbf{M}) のタグ付三角形分割とする. このとき, $F_{T'} = F_{T''}$ ならば $T' = T''$ である. 特に, F 多項式の集合は一致する.

この定理 4.2.5 が仮定 4.1.5 を満たすような点付き曲面から誘導される団代数における予想 4.0.2 の解決を意味している. さらに, $T' = T''$ を構成する各弧について具体的な F 多項式を与える公式が (4.2.2) により与えられている. これが問題 4.0.4 に対する解答となっている. 予想 4.0.2 と問題 4.0.4 に対応する形で改めて定理を書いておく.

定理 4.2.6. 点付曲面 (\mathbf{S}, \mathbf{M}) と T を 4 点付球面かつ 3 つの共役な弧の組でないような点付曲面とタグ付三角形分割とする. この点付曲面とタグ付三角形分割からから誘導される団パターン $t \mapsto \{\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ について, 次が成り立つ: t, t' を \mathbb{T} の頂点とする. このとき,

$$F_t^{B;t_0} = F_{t'}^{B;t_0} \Rightarrow \{x_{1;t}, \dots, x_{n;t}\} = \{x_{1;t'}, \dots, x_{n;t'}\} \tag{4.2.3}$$

特に,

$$\{F_{1;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}), \dots, F_{n;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})\} = \{F_{1;s}^{B;t_0}(\mathbf{y}), \dots, F_{n;s}^{B;t_0}(\mathbf{y})\} \quad (4.2.4)$$

となる. また, $F_t^{B;t_0} = (\mathbf{f}_{1;t}, \dots, \mathbf{f}_{n;t})$ が任意に与えられたとき, これらに付随する n 個の F 多項式は, F 行列に対応するタグ付三角形分割 $T' = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ に付随する $\{F_{\delta_1}^{B;t_0}(\mathbf{y}), \dots, F_{\delta_n}^{B;t_0}(\mathbf{y})\}$ と決定される. ただし,

$$F_{\delta_i}(\mathbf{y}) = \Phi \left(\sum_{A \in \mathcal{A}(T_{\delta_i})} y(A) \right) \quad (4.2.5)$$

である.

この章の主題は述べ終わったが, 定理 4.1.6 の証明を後回しにしていたのであった. 次の節とその次の節で, これらの証明を見ていくことにする.

4.3 タグ付弧の修正

この節では後のためにタグ付弧に修正を施すことを考える. まずその目的を説明しておく. 定理 4.1.6 を示すための準備段階としてまず特定の集合に属する弧を交点数から決定することをこれから考える. その際, 初期三角形分割 T によって分かれるパズル片のそれぞれについて, その上を通る弧を交点数を用いて個別に特定し, それらをつなぎ合わせることで1つの弧を決定するのであるが, このときパズル片上の交点数が各辺等しく, 通り方の異なる弧が存在することが問題になる. そこで, タグ付弧に修正を加えてこれらを一旦同一視し, 各々をつなぎ合わせた後で元に戻すことでこの問題を解決しようというのが, 以下で定義する修正タグ付弧のモチベーションである.

T についての修正タグ付弧を定義する. $\delta \notin T$ を (\mathbf{S}, \mathbf{M}) の弧とする. このとき, タグ付弧 $\hat{\delta}$ を次のように定める: δ が p を端点として持ち, その端についているタグがノッチで, かつ T の弧にも p の端でノッチのタグを持つものがある場合, $\hat{\delta} = \delta^{(p)}$ とする. それ以外の場合は, $\hat{\delta} = \delta$ とする (図 4.7 参照). 仮定 4.1.7 より, T の1ノッチ弧は必ず T における共役弧の組の片方の弧であることに注意する. 次に, $\hat{\delta}$ から T に対する交点数を変えないように $\hat{M}_T(\hat{\delta})$ を定める. まず $\bar{\delta} \notin T$ であるような $\hat{\delta}$ について,

- $\hat{\delta}$ がプレーン弧であるとき, $\hat{M}_T(\hat{\delta}) = \hat{\delta}$ とする.
- $\hat{\delta}$ がループでない1ノッチ弧のとき, $\hat{\delta}$ のノッチのタグがついた端を図 4.3 の左側にある図のように取り替えたものが $\hat{M}_T(\hat{\delta})$ である.
- $\hat{\delta}$ が2ノッチのループであり, その端が2つとも T の同じ三角形から出ているとき, $\hat{\delta}$ のノッチのタグがついた端を図 4.3 の真ん中にある図のように取り替えたものが $\hat{M}_T(\hat{\delta})$ である.
- それ以外の時, $\hat{\delta}$ のノッチのタグがついた端を図 4.3 の右側にある図のように取り替えたものが $\hat{M}_T(\hat{\delta})$ である.

次に $\bar{\delta} \in T$ であるような $\bar{\delta}$ について,

- $\bar{\delta}$ が1ノッチ弧であるとき, $\hat{M}_T(\bar{\delta})$ は1ノッチタグがついていた穴を囲む, $\bar{\delta}$ のプレーンタグがついている端に繋がっている点を端点とするループとする.

- $\hat{\delta}$ が 2 ノッチ弧であるとき, $\hat{M}_T(\hat{\delta})$ は $\hat{\delta}$ の端点を囲む 2 つの円とする. このとき円の端点となる点は存在せず, また 2 つの端点と同じ場合は二重の円ができることに注意する.

最後に, $M_T(\delta)$ を定義する. δ が p につながる端にノッチのタグを持っている時, $M_T(\delta) = \hat{M}_T(\hat{\delta})^{(p)}$ と定義する (図 4.7 参照). それ以外の時, $M_T(\delta) = \hat{M}_T(\hat{\delta})$ とする. 任意の $\delta \notin T$ に対して, この $M_T(\delta)$ を δ の T における **修正タグ付弧** (*modified tagged arc*) という.

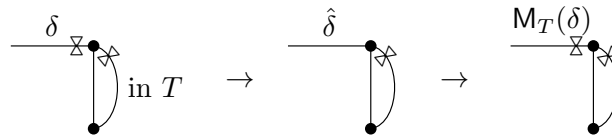


図 4.7 δ から $\hat{\delta}$, $M_T(\delta)$ への変換

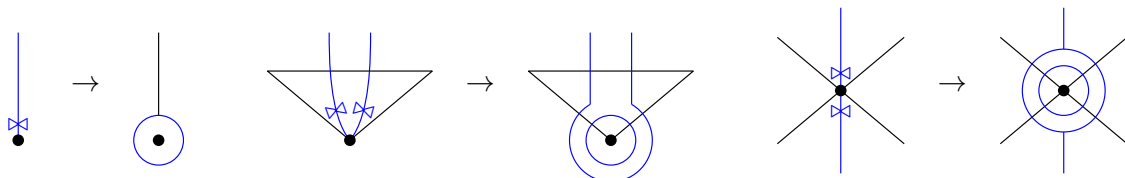
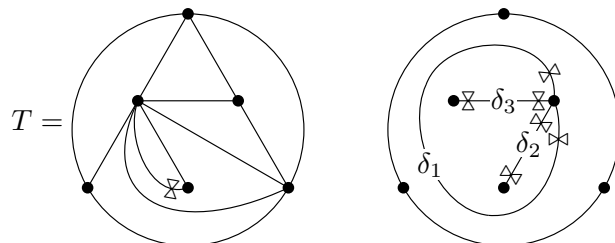
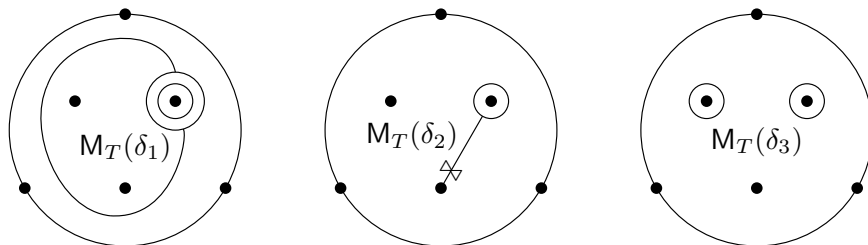


図 4.8 $\hat{\delta}$ の $\hat{M}_T(\hat{\delta})$ への修正

例 4.3.1. タグ付三角形分割 T とタグ付弧 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ を次のように定める.



このとき, T における修正タグ付弧 $M_T(\delta_i)$ はつぎのようになる:



修正タグ付弧 m とタグ付弧 δ の交点数もタグ付弧同士の交点数と同じ定義で定めることができる. 記号の乱用であるが, これを $\text{Int}(m, \delta)$ とする. M_T による変換は一見奇妙に見えるが, 以下の命題が成り立つ.

命題 4.3.2 ([GY]). (1) (S, M) の任意のタグ付弧 δ について, $\text{Int}(T, \delta) = \text{Int}(T, M_T(\delta))$ が成り立つ.

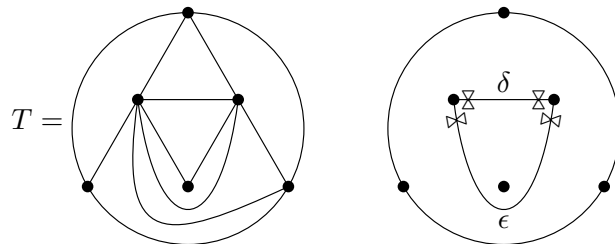
(2) M_T をタグ付弧から修正タグ付弧全体への写像とみなしたとき、始集合を次のように制限すると全単射となる：

$$A := \{ \delta \mid \delta \notin T \text{ かつ } M_T(\delta) \text{ が穴を囲む 2 つの円でない} \}$$

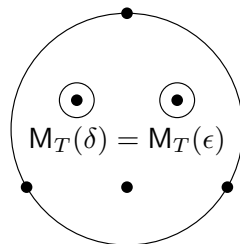
さらに、任意の $\delta \in A$ について、 $M_T(\delta) = M_T(\epsilon)$ かつ $\epsilon \notin T$ ならば $\delta = \epsilon$ が成立する。

証明. 構成法から明らか。 □

注 4.3.3. δ が T に属する弧である、または $M_T(\delta)$ が穴を囲む 2 つの円であるとき、 $M_T(\delta)$ は必ずしも δ と 1 対 1 対応するとは限らない。 T に含まれる弧は T との交点ベクトルが零ベクトルなので前者は明らかである。 後者の具体例を挙げる。 次のように T, δ, ϵ を定める：



このとき、対応する T における修正タグ付弧 $M_T(\delta), M_T(\epsilon)$ は次のように一致する：



修正タグ付弧を考える理由は、次の定理にある：

定理 4.3.4. [GY] m と m' を T における修正タグ付弧とする。 $\text{Int}(T, m) = \text{Int}(T, m')$ であるとき、 $m = m'$ が成立する。

定理 4.3.4 の証明の概略. 定理 4.3.4 を示すためには、 $\text{Int}(T, m)$ から m を具体的に決定できれば良い。特に、タグ付三角形分割 T をパズル片に分けたとき、そのパズル片を形成する弧に付随する交点数から、パズル片を通る弧の切片が一意的に決定されることを示せば十分である。よって、考えられるパズル片とそこを通る弧の切片の組み合わせを全て数え上げ、それに対応する交点数が全て異なっていることを示すのが、この証明の方針である。まず、 T における δ の交点ベクトルを考える上で、 $\delta = \hat{\delta}$ を仮定して良い。実際、 $\delta \neq \hat{\delta}$ であるものについては、 $\text{Int}(T, \hat{\delta})$ は $\text{Int}(T, \delta)$ のベクトルの、 δ のノッチをもつ端点に繋がっている T の共役な弧の組に対応する成分を入れ替えたものとなっている。さて、 \square を T のパズル片とする。ここで、 \square が三角片または 1 孔片であるときパズル片は複数の頂点を 1 点として共有している場合があるので、これを次のようにして区別する。共有している頂点がひとつもないとき、これを「Case(-)」と表示することにする。また、 τ_i の両端の頂点が 1 点として共有されているとき、これを「Case(τ_i)」、 τ_i と τ_{i+1} の 4 つの端点が 1 点として共有されているとき、これを「Case(τ_i, τ_{i+1})」と表す (図 4.9, 4.10 参照)。 δ を (\mathbf{S}, \mathbf{M}) の T に含まれない弧とする。曲線の集合 $\delta \cap \square$ を考え、この元たちを δ の \square における**切片** (segment) という。三角片、1 孔

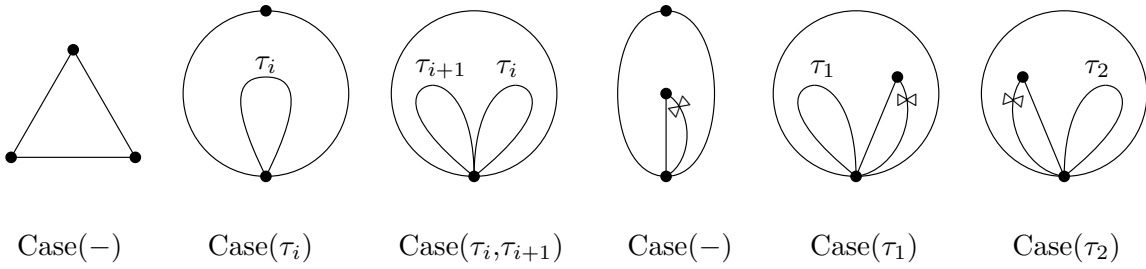


図 4.9 三角片の端点共有ケース

図 4.10 1 孔片の端点共有ケース

片, 2 孔片に現れる切片はそれぞれ表 4.1, 4.2, 4.3 にあるもので尽くされる. ここで a_i は切片と τ_i の交点数を表す. さらに, 曲線の集合 $M_T(\delta) \cap \square$ を考え, この元たちを δ の \square における**修正切片** (*modified segment*) という. 2 つの異なる \square の切片 s と s' について $M_T(s) = M_T(s') = m$ が成立するとき, m は図 4.11 に挙げられているもののどれかであり, またそれ以外の際は $M_T(s) = m$ を満たす s がただ 1 つ存在する. 特に, 表 4.4 は $s \neq M_T(s)$ を満たすものを尽くしている.

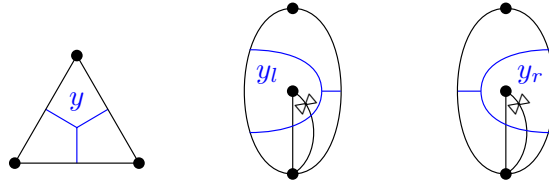


図 4.11 修正タグ付弧の例外的切片

さらに, これらの修正切片の集合 $M(\delta) \cap \square$ は \square が三角片, 1 孔片, 2 孔片のとき, それぞれ表 4.5, 4.6, 4.7 に挙げられるもので尽くされる. ここで, 弧 δ の端は \square に含まれないが, 端点は \square の頂点であり, δ はその端点側の端にノッチのタグを持つとき, 切片で $\delta \cap \square$ には属さないが $M(\delta) \cap \square$ には属するものが存在することに注意する. これらについては, 弧の修正に対応するように図 4.12 のように同一視を行う. 表 4.5, 4.6, 4.7 において, このような同一視が行われた切片は修正後の切片の記号を用いて表している. 例えば, 表 4.5 Case (-) の上から 5 番目の切片集合に含まれる切片 e_1 はこの同一視が行われた切片である.

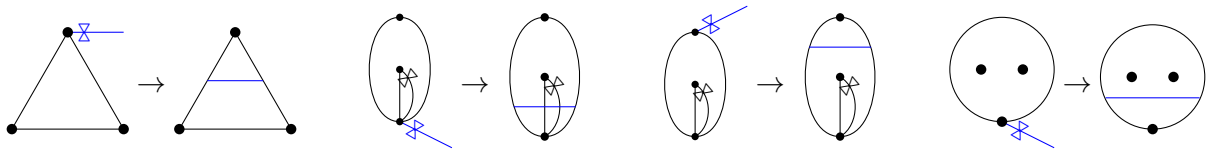


図 4.12 \square における同一視

あとは, 与えられた交点ベクトルに対して表 4.5, 4.6, 4.7 の中で一致するベクトルがただ 1 つに定まることを直接計算によって確かめれば, それらを端が 2 つのみになるようにつなぎ合わせる方法は一意的なので, 交点ベクトルに対応する弧 m が一意的に決定されて証明が完了する. 計算の詳細は付録 A に記す. □

直ちに次の系が従う：

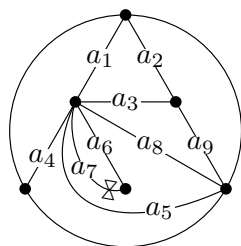
系 4.3.5. [GY] δ と ϵ を A に属する弧とする. このとき $\text{Int}(T, \delta) = \text{Int}(T, \epsilon)$ ならば $\delta = \epsilon$ である.

4.4 定理 4.1.6 の証明

最後に, 定理 4.1.6 を証明する.

定理 4.1.6 の証明. $T' = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, $T'' = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ を (\mathbf{S}, \mathbf{M}) のタグ付三角形分割で任意の i に対して $\text{Int}(T, \delta_i) = \text{Int}(T, \epsilon_i)$ が成立しているとする. ここで, 任意の $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して $\delta_i \in A$ であり, 任意の $j \in \{k+1, \dots, n\}$ に対して $\delta_j \notin A$ であるとして一般性を失わない. このとき, δ_j と ϵ_j はどちらも T に属する, または $M_T(\delta_j) = M_T(\epsilon_j)$ が穴を囲む 2 つの円であるかのどちらかであることが定理 4.3.4 から従う. また系 4.3.5 より, $i \in \{1, \dots, k\}$ に対して $\delta_i = \epsilon_i$ であることがわかる. よって, $T' \neq T''$ を仮定すると $f, g \in \{k+1, \dots, n\}$ で $\text{Int}(\delta_f, \epsilon_g) \neq 0$ なるものが存在する. $\overline{\delta_f}$ と $\overline{\epsilon_g}$ は T に含まれるから, δ_f と ϵ_g は共通の端点を持ち, しかもその端において異なるタグを持つ. ここで, δ_f と ϵ_g はどちらかが T に属している. 実際, $\delta_f, \epsilon_g \in A$ のどちらかは少なくとも片方の端にプレーンタグがついていることを考えると, どちらかは必ずプレーン弧か 1 ノッチ弧である. これを δ_f であるとする, δ_f がプレーン弧のとき $\delta_f = \overline{\delta_f} \in T$ なので T に属する. また, 1 ノッチ弧のときも A の定義からやはり T に属する. よって, $\delta_f \in T$ として一般性を失わない. またこのとき, $M_T(\epsilon_g) = M_T(\delta_g)$ は穴を囲む 2 つの円である. 実際, ϵ_g は少なくとも片方の端にノッチタグを持っているので 1 ノッチ弧か 2 ノッチ弧であるが, 1 ノッチ弧であると仮定すると A に入っていることから T の元となり, このとき $\text{Int}(\delta_f, \epsilon_g) \neq 0$ に矛盾. よって 2 ノッチ弧であり, $\overline{\epsilon_g} \in T$ であることから従う. さて, δ_f と δ_g は共通の端点を持っており, $\text{Int}(\delta_f, \delta_g) = 0$ である. よって, 仮定 4.1.7 により δ_g は 1 ノッチ弧である. このとき $\hat{\delta}_g$ は 2 ノッチ弧とならないが, これは $M_T(\delta_g)$ が穴を囲む 2 つの円であることに矛盾する. よって示された. \square

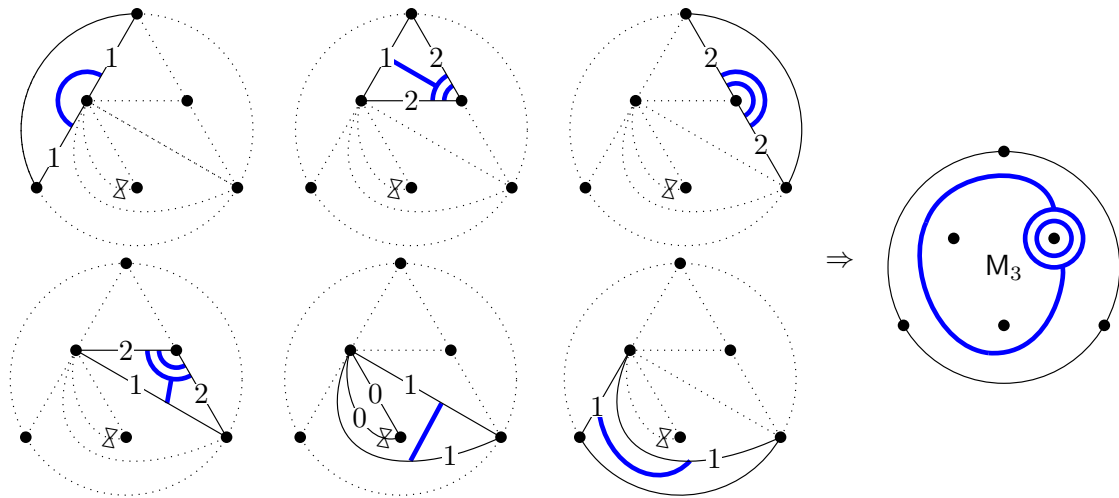
例 4.4.1. T を例 4.3.1 であげたタグ付三角形分割であるとする. このとき, 次のような交点ベクトルを考える.



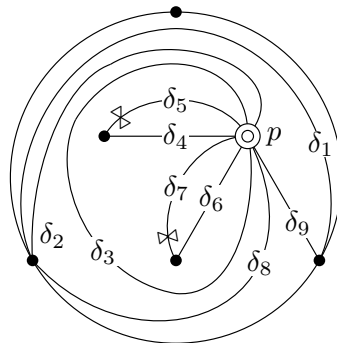
$$\begin{aligned}
 v_1 &= {}^t(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) & v_6 &= {}^t(0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1) \\
 v_2 &= {}^t(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) & v_7 &= {}^t(0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1) \\
 v_3 &= {}^t(1, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 1, 2) & v_8 &= {}^t(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1) \\
 v_4 &= {}^t(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) & v_9 &= {}^t(0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
 v_5 &= {}^t(1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1) & &
 \end{aligned}$$

定理 4.3.4 により, 任意の v_i から T についての一意的な修正タグ付弧 M_i を得る. 実際, 例えば M_3

は前節の方法で次のようにして決定される：



同様にして、他の M_i を得る. $i \in \{1, \dots, 4, 6, \dots, 9\}$ に対しては $M_T(\delta_i) = M_i$ を満たす δ_i が一意的に決まる. $i = 5$ のときは修正タグ付弧のみからその弧を一意的に決定することはできないが、すでに決定しているの弧 δ_i ($i \neq 5$) 達から δ_5 が一意的に決まる. これにより、次のタグ付三角形分割 $\{\delta_1, \dots, \delta_9\}$ を得ることができただし、穴 p につながる弧は全て p 側の端にノッチのタグを持っているとする.



4.5 C 行列, G 行列, F 行列を用いた団と係数の決定

この節では、点付曲面から誘導される団代数について、C 行列, G 行列, F 行列から実際に団と係数を求める方法を与える. この節の結果は著者独自の新しい結果である.

まず次の補題を与える.

補題 4.5.1. 任意の団パターン $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ とこれに付随する任意の C 行列 $C_t^{B;t_0}$ と任意の G 行列 $G_t^{B;t_0}$ について、 $\det(C_t^{B;t_0}) = \det(G_t^{B;t_0}) \in \{\pm 1\}$ が成立する. 特に、 $\det(C_t^{B;t_0}) \neq 0$, $\det(G_t^{B;t_0}) \neq 0$ であり、1つの C 行列中、あるいは G 行列中に成分が同一である列は存在しない.

証明. C 行列の場合は注 3.2.3 ですすでに示した. G 行列の場合は注 3.2.3 と同様の考察を (3.2.2) で行えば良い. □

これにより、次の定理が従う.

定理 4.5.2. 任意の (S, M) と T から誘導される団パターン $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ について、頂点 t に

における C 行列 $G_t^{B;t_0}$, G 行列 $G_t^{B;t_0}$, F 行列 $F_t^{B;t_0}$ が与えられているとき, これらに対応する団 $(x_{1;t}, \dots, x_{n;t})$ と係数 $(y_{1;t}, \dots, y_{n;t})$ は一意的に定まり, さらに

$$x_{j;t} = \prod_{i=1}^n x_i^{g_{ij;t}} \frac{\hat{\Phi} \left(\sum_{A \in \mathbb{A}(T_{\delta_{j;t}})} y(A) \right) \Big|_{\mathcal{F}}}{\Phi \left(\sum_{A \in \mathbb{A}(T_{\delta_{j;t}})} y(A) \right) \Big|_{\mathbb{P}}}, \quad (4.5.1)$$

$$y_{j;t} = \prod_{k=1}^n y_k^{c_{kj;t}} \prod_{k=1}^n \Phi \left(\sum_{A \in \mathbb{A}(T_{\delta_{k;t}})} y(A) \right) \Big|_{\mathbb{P}}^{b_{kj;t}}. \quad (4.5.2)$$

となる. ここで, $\delta_{k;t}$ は $F_t^{B;t_0}$ の列ベクトル $\mathbf{f}_{k;t}^{B;t_0}$ に対応する (\mathbf{S}, \mathbf{M}) のタグ付弧であり, $\hat{\Phi}$ は Φ の操作をした後で各 y_i に \hat{y}_i を代入する操作を行う写像である.

証明. まず, 仮定 4.1.5 を満たす場合を考える. 定理 4.2.5 より $F_t^{B;t_0}$ からまず頂点 t に対応する三角形分割 T_t が定まり, さらに定理 4.2.3 を用いることにより t_0 において主係数を持つ団変数の集合 $\{x_{1;t}^*, \dots, x_{n;t}^*\}$ が一意的に定まる (この段階ではまだどの団変数がどの \mathbf{f} ベクトルに対応するかまでは決定していないことに注意). このとき, 補題 4.5.1 より, $\{x_{1;t}^*, \dots, x_{n;t}^*\}$ の定理 2.2.7 による次数付けとそれに対応する $G_t^{B;t_0}$ の列成分は 1 対 1 で対応する. これにより, 団変数のラベル付による順番が決定される. 特に, $x_1 = \dots = x_n = 1$ とすることで F 多項式を得る. あとは分離公式 (2.3.19), (2.3.16) を用いることで団変数と係数の具体的な表示が決定される.

次に仮定 4.1.5 を満たさない場合を考える. まず頂点 t に対応する三角形分割を T_t を求めることを考える. $F_t^{B;t_0}$ と $G_t^{B;t_0}$ から, F 行列の後方変異 (3.3.12) を用いることで, $t_0 \xrightarrow{k} t_1$ を満たす t_1 に対して $F_t^{B;t_1}$ の値が求まる. これは三角形分割 T の k に対応する弧をフリップした三角形分割 T_1 を新たに初期三角形分割とした時の交点行列 $\text{Int}(T_1, T_t)$ に他ならない (定理 4.2.4). ところで T_1 は仮定 4.1.5 を満たすので, 定理 4.2.5 より $F_t^{B;t_1}$ に (したがって $F_t^{B;t_0}$ に) 対応する三角形分割 T_t が具体的に定まる. 後の手順は仮定 4.1.5 を満たす場合と同様である. \square

この定理により, 点付曲面から誘導される団パターンにおいては, その団変数と係数は $\{B_t\}_{t \in \mathbb{T}}, \{C_t^{B;t_0}\}_{t \in \mathbb{T}}, \{G_t^{B;t_0}\}_{t \in \mathbb{T}}, \{F_t^{B;t_0}\}_{t \in \mathbb{T}}$ で表現されることがわかった. すなわち, 従来の計算方法ではこれまで F 多項式が必要だったところが, その最高次数行列である F 行列の情報だけで十分であるということが示された.

表 4.1 三角片における切片とそれに対応する交点部分ベクトル (a_1, a_2, a_3)

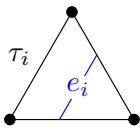
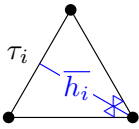
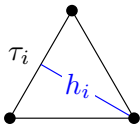
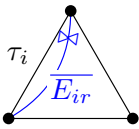
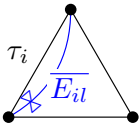
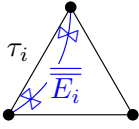
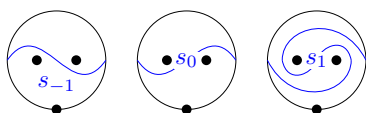
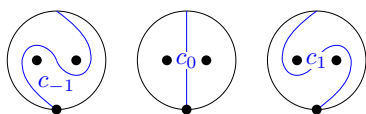
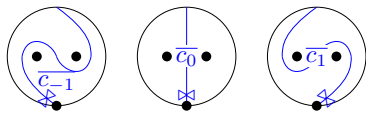
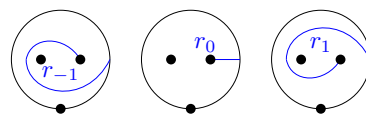
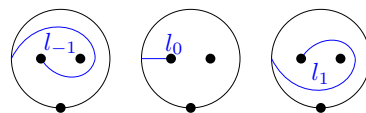
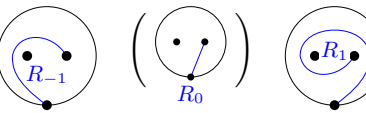
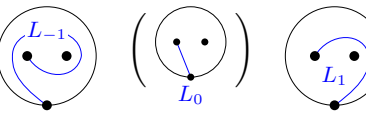
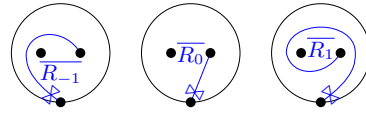
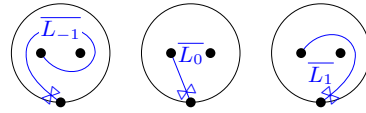
切片		(a_1, a_2, a_3)	切片		(a_1, a_2, a_3)		
					Case(-)	Case(τ_1)	Case(τ_1, τ_2)
	e_1	$(0, 1, 1)$		$\overline{h_1}$	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$	$(3, 2, 2)$
	e_2	$(1, 0, 1)$		$\overline{h_2}$		$(2, 2, 1)$	$(2, 3, 2)$
	e_3	$(1, 1, 0)$		$\overline{h_3}$		$(2, 1, 2)$	$(2, 2, 3)$
	h_1	$(1, 0, 0)$		$\overline{E_{1r}}$	$(0, 1, 0)$	\times	\times
	h_2	$(0, 1, 0)$		$\overline{E_{2r}}$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 1)$	\times
	h_3	$(0, 0, 1)$		$\overline{E_{3r}}$	$(1, 0, 0)$	$(2, 1, 0)$	\times
	$\overline{E_{1l}}$	$(0, 0, 1)$	\times	\times			
	$\overline{E_{2l}}$	$(1, 0, 0)$	$(2, 0, 1)$	\times			
	$\overline{E_{3l}}$	$(0, 1, 0)$	$(0, 1, 0)$	\times			
	$\overline{\overline{E_1}}$	$(2, 1, 1)$	$(4, 2, 2)$	$(2, 2, 2)$	$(4, 4, 4)$		
	$\overline{\overline{E_2}}$	$(1, 2, 1)$					
	$\overline{\overline{E_3}}$	$(1, 1, 2)$					

表 4.2 1 孔片における切片とそれに対応する交点部分ベクトル (a_1, a_2, a_3, a_4)
 (上が $\text{Case}(-)$, 下が $\text{Case}(\tau_1)$ の時の値)

切片					
(a_1, a_2, a_3, a_4)	(1,1,0,0)	(1,1,1,1)	(0,0,0,1)	(2,0,1,1)	(0,2,1,1)
(1,0,1,1)	(0,1,1,1)	(1,0,0,0)	(0,1,0,0)	(1,0,0,1)	(0,1,0,1)
(2,1,1,1)	(1,2,1,1)	(2,1,1,1)	(1,2,1,1)	(1,0,1,1)	(0,1,1,1)
(3,2,2,2)	(2,3,2,2)	(3,2,1,1)	(2,3,1,1)	×	×
(1,0,0,0)	(0,1,0,0)	(2,2,1,1)	(2,2,1,1)	(1,1,0,1)	(1,1,0,2)
×	×	(4,4,2,2)	(4,4,2,2)	(2,2,1,2)	(2,2,0,2)

表 4.3 2 孔片における切片とそれに対応する交点部分ベクトル $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$

ただし, s_n, c_n, \bar{c}_n はそれぞれ s_0, c_0, \bar{c}_0 から端点を境界に沿って時計回りに角度 π だけ動かして得たもの, それ以外は 2π 動かしたものである.

切片		$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$
\dots  \dots	s_n	$(2, n+1 , n+1 , n , n)$
\dots  \dots	c_n	$(1, 0, 0, 0, 0)$ ($n=0$) $(1, n, n, n-1, n-1)$ ($n>0$) $(1, -n-1, -n-1, -n, -n)$ ($n<0$)
\dots  \dots	\bar{c}_n	$(3, 1, 1, 1, 1)$ ($n=0$) $(3, n+1, n+1, n, n)$ ($n>0$) $(3, -n, -n, -n+1, -n+1)$ ($n<0$)
\dots  \dots	r_n	$(1, n, n, n-1, n)$ ($n>0$) $(1, -n, -n, -n, -n+1)$ ($n\leq 0$)
\dots  \dots	l_n	$(1, n, n+1, n, n)$ ($n\geq 0$) $(1, -n-1, -n, -n, -n)$ ($n<0$)
\dots  \dots	R_n	$(0, n, n, n-1, n)$ ($n>0$) $(0, -n-1, -n-1, -n-1, -n)$ ($n<0$)
\dots  \dots	L_n	$(0, n-1, n, n-1, n-1)$ ($n>0$) $(0, -n-1, -n, -n, -n)$ ($n<0$)
\dots  \dots	\bar{R}_n	$(2, 1, 1, 0, 2)$ ($n=0$) $(2, n+1, n+1, n, n+1)$ ($n>0$) $(2, -n, -n, -n, -n+1)$ ($n<0$)
\dots  \dots	\bar{L}_n	$(2, 0, 2, 1, 1)$ ($n=0$) $(2, n, n+1, n, n)$ ($n>0$) $(2, -n, -n+1, -n+1, -n+1)$ ($n<0$)

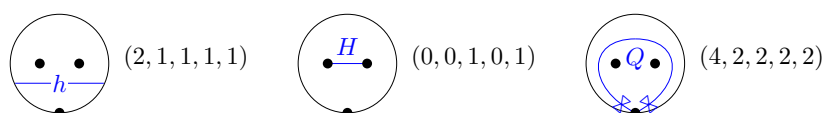


表 4.4 切片 s とそれに対応する修正切片 $M_T(s)$ が異なる場合
 (ただし, $h_{3k+j} = h_j$, $e_{3k+j} = e_j$ とする)

三角片の場合		1 孔片の場合	
切片	修正切片	切片	修正切片
$\overline{h_i}$	y	$\overline{l_{\pm}}$	y_l
$\overline{2h_i}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\overline{r_{\pm}}$	y_r
$\overline{E_{ir}}$	h_{i+1}	\underline{L}	l_+
$\overline{E_{il}}$	h_{i-1}	\underline{R}	r_+
$\overline{\overline{E_i}}$	$\{2e_{i-1}, 2e_{i+1}\}$	\overline{L}	l_-
2 孔片の場合		\overline{R}	r_-
		$\overline{L}, \overline{R}$	$\{u, d\}$
		$\overline{P_-}$	$\{r_p, l_p\}$
		Q	$2h$
		$\overline{R_0}$	$\{r_0, r_1\}$
$\overline{L_0}$	$\{l_0, l_{-1}\}$		
$2\overline{c_n}$	$\{s_{n-1}, s_n, h\}$		

表 4.5 $a_1 \geq a_2, a_3$ であるときの三角片における切片集合とそれに対応する修正切片集合 (ただし, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k_i \in \{0, 1\}$ かつ $k_1 \leq k_2, k_3$)

Case(-)		
切片集合	修正切片集合	(a_1, a_2, a_3)
$\{m_1e_1, m_2e_2, m_3e_3\}$		$(m_2 + m_3, m_3 + m_1, m_1 + m_2)$
$\{h_1, m_2e_2, m_3e_3\}$		$(1 + m_2 + m_3, m_3, m_2)$
$\{2h_1, m_2e_2, m_3e_3\}$		$(2 + m_2 + m_3, m_3, m_2)$
$\{\overline{h_1}, m_2e_2, m_3e_3\}$	$\{y, m_2e_2, m_3e_3\}$	$(1 + m_2 + m_3, 1 + m_3, 1 + m_2)$
$\{\overline{h_1}, e_1, m_2e_2, m_3e_3\}$	$\{y, e_1, m_2e_2, m_3e_3\}$	$(1 + m_2 + m_3, 2 + m_3, 2 + m_2)$
$\{2\overline{h_1}, m_2e_2, m_3e_3\}$	$\{e_1, (m_2 + 1)e_2, (m_3 + 1)e_3\}$	上で既出
$\{\overline{h_2}, k_1e_1, k_2e_2, k_3e_3\}$	$\{y, k_1e_1, k_2e_2, k_3e_3\}$	
$\{\overline{h_3}, k_1e_1, k_2e_2, k_3e_3\}$		
$\{2\overline{h_2}, m_3e_3\}$	$\{e_1, e_2, (1 + m_3)e_3\}$	
$\{2\overline{h_3}, m_2e_2\}$	$\{e_1, (1 + m_2)e_2, e_3\}$	
$\{\overline{E_{3r}}, \overline{E_{2l}}\}$	$\{h_1\}$	
$\{\overline{E_1}\}$	$\{e_2, e_3\}$	

Case(τ_i) で Case(-) に現れないもの

i	切片集合	修正切片集合	(a_1, a_2, a_3)
1	$\{\overline{E_{2l}}, e_2\}$	$\{h_1, e_2\}$	上で既出
1	$\{\overline{E_{3r}}, e_3\}$	$\{h_1, e_3\}$	
1	$\{\overline{E_1}, e_2, e_3\}$	$\{2e_2, 2e_3\}$	
2, 3	$\{\overline{E_1}, e_1\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$	
1, 3	$\{\overline{E_2}, e_2\}$		
1, 2	$\{\overline{E_3}, e_3\}$		

Case(τ_i, τ_j) で他のケースで現れないもの

切片集合	修正切片集合	(a_1, a_2, a_3)
$\{\overline{E_k}, e_1, e_2, e_3\}$	$\{2e_1, 2e_2, 2e_3\}$	上で既出

表 4.6 $a_1 \leq a_2$ であるときの 1 孔片における切片集合とそれに対応する修正切片集合 (ただし $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

Case(-)		
切片集合	修正切片集合	(a_1, a_2, a_3, a_4)
$\{m_1 r, m_2 u, m_3 d\}$		$(m_2 + m_3, 2m_1 + m_2 + m_3, m_1 + m_3, m_1 + m_3)$
$\{r_+, m_1 r, m_3 d\}$		$(m_3, 1 + 2m_1 + m_3, 1 + m_1 + m_3, 1 + m_1 + m_3)$
$\{2r_+, m_1 r, m_3 d\}$		$(m_3, 2 + 2m_1 + m_3, 2 + m_1 + m_3, 2 + m_1 + m_3)$
$\{r_-, m_1 r, m_2 u\}$		$(m_2, 1 + 2m_1 + m_2, m_1, m_1)$
$\{2r_-, m_1 r, m_2 u\}$		$(m_2, 2 + 2m_1 + m_2, m_1, m_1)$
$\{\bar{r}_+, m_1 r, m_3 d\}$	$\{y_r, m_1 r, m_3 d\}$	$(1 + m_3, 2 + 2m_1 + m_3, 1 + m_1 + m_3, 1 + m_1 + m_3)$
$\{\bar{r}_+, u, m_1 r, m_3 d\}$	$\{y_r, u, m_1 r, m_3 d\}$	$(2 + m_3, 3 + 2m_1 + m_3, 1 + m_1 + m_3, 1 + m_1 + m_3)$
$\{\bar{r}_-, m_1 r, m_2 u\}$	$\{y_r, m_1 r, m_2 u\}$	$(1 + m_2, 2 + 2m_1 + m_2, 1 + m_1, 1 + m_1)$
$\{\bar{r}_-, d, m_1 r, m_2 u\}$	$\{y_r, d, m_1 r, m_2 u\}$	$(2 + m_2, 3 + 2m_1 + m_2, 2 + m_1, 2 + m_1)$
$\{r_p, m_1 r, m_2 u, m_3 d\}$		$(m_2 + m_3, 1 + 2m_1 + m_2 + m_3, m_1 + m_3, 1 + m_1 + m_3)$
$\{r_p, r_+, m_1 r, m_3 d\}$		$(m_3, 2 + 2m_1 + m_3, 1 + m_1 + m_3, 2 + m_1 + m_3)$
$\{r_p, r_-, m_1 r, m_2 u\}$		$(m_2, 2 + 2m_1 + m_2, m_1, 1 + m_1)$
$\{r_p, \bar{r}_+, m_1 r, m_3 d\}$	$\{r_p, y_r, m_1 r, m_3 d\}$	$(1 + m_3, 3 + 2m_1 + m_3, 1 + m_1 + m_3, 2 + m_1 + m_3)$
$\{r_p, \bar{r}_+, u, m_1 r, m_3 d\}$	$\{r_p, y_r, u, m_1 r, m_3 d\}$	$(2 + m_3, 4 + 2m_1 + m_3, 1 + m_1 + m_3, 2 + m_1 + m_3)$
$\{r_p, \bar{r}_-, m_1 r, m_2 u\}$	$\{r_p, y_r, m_1 r, m_2 u\}$	$(1 + m_2, 3 + 2m_1 + m_2, 1 + m_1, 2 + m_1)$
$\{r_p, \bar{r}_-, d, m_1 r, m_2 u\}$	$\{r_p, y_r, d, m_1 r, m_2 u\}$	$(2 + m_2, 4 + 2m_1 + m_2, 2 + m_1, 3 + m_1)$
$\{P_+\}$		$(0, 0, 0, 1)$
$\{\bar{P}_+\}$		$(1, 1, 0, 1)$
$\{2r_p, m_1 r, m_2 u, m_3 d\}$		$(m_2 + m_3, 2 + 2m_1 + m_2 + m_3, m_1 + m_3, 2 + m_1 + m_3)$
$\{r_p, l_p, m_2 u, m_3 d\}$		$(1 + m_2 + m_3, 1 + m_2 + m_3, m_3, 2 + m_3)$
$\{2\bar{r}_+, m_1 r, m_3 d\}$	$\{(m_1 + 2)r, 2u, (m_3 + 2)d\}$	上で既出
$\{2\bar{r}_-, m_1 r, m_2 u\}$	$\{(m_1 + 2)r, (m_2 + 2)u, 2d\}$	
$\{\bar{P}_-\}$	$\{r_p, l_p\}$	
$\{\bar{R}\}$	$\{r_+\}$	
$\{\bar{R}\}$	$\{r_-\}$	
$\{\bar{\bar{R}}\}, \{\bar{\bar{L}}\}$	$\{u, d\}$	

Case(τ_i) で Case(-) に現れないもの

$\{\bar{P}_+, d\}$		$(2, 2, 1, 2)$
$\{\bar{P}_-, u\}$	$\{r_p, l_p, u\}$	上で既出
$\{\bar{\bar{R}}, u, d\}, \{\bar{\bar{L}}, u, d\}$	$\{2u, 2d\}$	

表 4.7 $a_3 - a_2 \leq a_5 - a_4$ であるときの 2 孔片における切片集合とそれに対応する修正切片集合 (ただし, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であり, (\uparrow) , (\leftarrow) はそれぞれすぐ上, すぐ左と同じ項が入ることを意味する)

切片集合 = 修正切片集合

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$	
$\{c_n, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n\}$	
$(1 + 2(m_1 + m_2), m_2, m_2, m_1, m_1)$	$(n = 0)$
$((\uparrow), n + m_1(n) + m_2(n + 1), (\leftarrow), n - 1 + m_1(n - 1) + m_2(n), (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), -n - 1 + m_1(-n) + m_2(-n - 1), (\leftarrow), -n + m_1(-n + 1) + m_2(-n), (\leftarrow))$	$(n < 0)$
$\{\bar{c}_n, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n\}$	
$(3 + 2(m_1 + m_2), 1 + m_2, 1 + m_2, 1 + m_1, 1 + m_1)$	$(n = 0)$
$((\uparrow), n + 1 + m_1(n) + m_2(n + 1), (\leftarrow), n + m_1(n - 1) + m_2(n), (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), -n + m_1(-n) + m_2(-n - 1), (\leftarrow), -n + 1 + m_1(-n + 1) + m_2(-n), (\leftarrow))$	$(n < 0)$
$\{\bar{c}_n, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n, h\}$	
$(5 + 2(m_1 + m_2), 2 + m_2, (\leftarrow), 2 + m_1, (\leftarrow))$	$(n = 0)$
$((\uparrow), n + 2 + m_1(n) + m_2(n + 1), (\leftarrow), n + 1 + m_1(n - 1) + m_2(n), (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), -n + 1 + m_1(-n) + m_2(-n - 1), (\leftarrow), -n + 2 + m_1(-n + 1) + m_2(-n), (\leftarrow))$	$(n < 0)$
$\{r_n, m_1 s_{2n-2}, m_2 s_{2n-1}, m_3 h\} (m_1 \neq 0)$	
$(1 + 2(m_1 + m_2 + m_3), m_1 + m_3, (\leftarrow), 2m_1 + m_2 + m_3, 1 + 2m_1 + m_2 + m_3)$	$(n = 0)$
$((\uparrow), n + m_1(2n - 1) + m_2(2n) + m_3, (\leftarrow), n - 1 + m_1(2n - 2) + m_2(2n - 1) + m_3, n + (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), -n + m_1(-2n + 1) + m_2(-2n) + m_3, (\leftarrow), -n + m_1(-2n + 2) + m_2(-2n + 1) + m_3, -n + 1 + (\leftarrow))$	$(n < 0)$
$\{r_n, m_1 s_{2n-1}, m_2 s_{2n}, m_3 h\}$	
$(1 + 2(m_1 + m_2 + m_3), m_2 + m_3, (\leftarrow), m_1 + m_3, 1 + m_1 + m_3)$	$(n = 0)$
$((\uparrow), n + m_1(2n) + m_2(2n + 1) + m_3, (\leftarrow), n - 1 + m_1(2n - 1) + m_2(2n) + m_3, n + (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), -n + m_1(-2n) + m_2(-2n - 1) + m_3, (\leftarrow), -n + m_1(-2n + 1) + m_2(-2n) + m_3, -n + 1 + (\leftarrow))$	$(n < 0)$
$\{2r_n, m_1 s_{2n-2}, m_2 s_{2n-1}, m_3 h\} (m_1 \neq 0)$	
$(2 + 2(m_1 + m_2 + m_3), m_1 + m_3, (\leftarrow), 2m_1 + m_2 + m_3, 2 + 2m_1 + m_2 + m_3)$	$(n = 0)$
$((\uparrow), 2n + m_1(2n - 1) + m_2(2n) + m_3, (\leftarrow), 2n - 2 + m_1(2n - 2) + m_2(2n - 1) + m_3, 2n + (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), -2n + m_1(-2n + 1) + m_2(-2n) + m_3, (\leftarrow), -2n + m_1(-2n + 2) + m_2(-2n + 1) + m_3, -2n + 2 + (\leftarrow))$	$(n < 0)$
$\{2r_n, m_1 s_{2n-1}, m_2 s_{2n}, m_3 h\}$	
$(2 + 2(m_1 + m_2 + m_3), m_2 + m_3, (\leftarrow), m_1 + m_3, 2 + m_1 + m_3)$	$(n = 0)$
$((\uparrow), 2n + m_1(2n) + m_2(2n + 1) + m_3, (\leftarrow), 2n - 2 + m_1(2n - 1) + m_2(2n) + m_3, 2n + (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), -2n + m_1(-2n) + m_2(-2n - 1) + m_3, (\leftarrow), -2n + m_1(-2n + 1) + m_2(-2n) + m_3, -2n + 2 + (\leftarrow))$	$(n < 0)$
$\{r_n, r_{n+1}, m_1 s_{2n}, m_3 h\}$	
$(2 + 2(m_1 + m_3), 1 + m_1 + m_3, (\leftarrow), m_3, 2 + m_3)$	$(n = 0)$
$((\uparrow), 1 + m_1 + m_3, (\leftarrow), 1 + 2m_1 + m_3, 3 + 2m_1 + m_3)$	$(n = -1)$
$((\uparrow), 2n + 1 + m_1(2n + 1) + m_3, (\leftarrow), 2n - 1 + m_1(2n) + m_3, 2n + 1 + (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), -2n - 1 + m_1(-2n - 1) + m_3, (\leftarrow), -2n - 1 + m_1(-2n) + m_3, -2n + 1 + (\leftarrow))$	$(n < -1)$
$\{\bar{R}_n\} (n \neq 0)$	
$(2, n + 1, n + 1, n, n + 1)$	$(n > 0)$
$(2, -n, -n, -n, -n + 1)$	$(n < 0)$

$\{r_n, c_{2n-1}, m_1 s_{2n-2}, m_2 s_{2n-1}\}$	
$(2 + 2(m_1 + m_2), m_1, (\leftarrow), 1 + 2m_1 + m_2, 2 + 2m_1 + m_2)$	$(n = 0)$
$((\uparrow), 3n - 1 + m_1(2n - 1) + m_2(2n), (\leftarrow), 3n - 3 + m_1(2n - 2) + m_2(2n - 1), 3n - 2 + (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), -3n + m_1(-2n + 1) + m_2(-2n), (\leftarrow), -3n + 1 + m_1(-2n + 2) + m_2(-2n + 1), -3n + 2 + (\leftarrow))$	$(n < 0)$
$\{r_n, c_{2n}, m_1 s_{2n-1}, m_2 s_{2n}\}$	
$(2 + 2(m_1 + m_2), m_2, (\leftarrow), m_1, 1 + m_1)$	$(n = 0)$
$((\uparrow), 3n + m_1(2n) + m_2(2n + 1), (\leftarrow), 3n - 2 + m_1(2n - 1) + m_2(2n), 3n - 1 + (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), -3n - 1 + m_1(-2n) + m_2(-2n - 1), (\leftarrow), -3n + m_1(-2n + 1) + m_2(-2n), -3n + 1 + (\leftarrow))$	$(n < 0)$
$\{r_n, \overline{c_{2n-1}}, m_1 s_{2n-2}, m_2 s_{2n-1}\}$	
$(4 + 2(m_1 + m_2), 1 + m_1, (\leftarrow), 2 + 2m_1 + m_2, 3 + 2m_1 + m_2)$	$(n = 0)$
$((\uparrow), 3n + m_1(2n - 1) + m_2(2n), (\leftarrow), 3n - 2 + m_1(2n - 2) + m_2(2n - 1), 3n - 1 + (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), -3n + 1 + m_1(-2n + 1) + m_2(-2n), (\leftarrow), -3n + 2 + m_1(-2n + 2) + m_2(-2n + 1), -3n + 3 + (\leftarrow))$	$(n < 0)$
$\{r_n, \overline{c_{2n}}, m_1 s_{2n-1}, m_2 s_{2n}\}$	
$(4 + 2(m_1 + m_2), 1 + m_2, (\leftarrow), 1 + m_1, 2 + m_1)$	$(n = 0)$
$((\uparrow), 3n + 1 + m_1(2n) + m_2(2n + 1), (\leftarrow), 3n - 1 + m_1(2n - 1) + m_2(2n), 3n + (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), -3n + m_1(-2n) + m_2(-2n - 1), (\leftarrow), -3n + 1 + m_1(-2n + 1) + m_2(-2n), -3n + 2 + (\leftarrow))$	$(n < 0)$
$\{r_n, l_{n-1}, m_1 s_{2n-2}, m_2 s_{2n-1}, m_3 h\}$	
$(2 + 2(m_1 + m_2 + m_3), m_1 + m_3, 1 + m_1 + m_3, 1 + 2m_1 + m_2 + m_3, 2 + 2m_1 + m_2 + m_3)$	$(n = 0)$
$((\uparrow), 2n - 1 + m_1(2n - 1) + m_2(2n) + m_3, 2n + (\leftarrow), 2n - 2 + m_1(2n - 2) + m_2(2n - 1) + m_3, 2n - 1 + (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), -2n + m_1(-2n + 1) + m_2(-2n) + m_3, -2n + 1 + (\leftarrow), -2n + 1 + m_1(-2n + 2) + m_2(-2n + 1) + m_3, -2n + 2 + (\leftarrow))$	$(n < 0)$
$\{r_n, l_n, m_1 s_{2n-1}, m_2 s_{2n}, m_3 h\}$	
$(2 + 2(m_1 + m_2 + m_3), m_2 + m_3, 1 + m_2 + m_3, m_1 + m_3, 1 + m_1 + m_3)$	$(n = 0)$
$((\uparrow), 2n + m_1(2n) + m_2(2n + 1) + m_3, 2n + 1 + (\leftarrow), 2n - 1 + m_1(2n - 1) + m_2(2n) + m_3, 2n + (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), -2n - 1 + m_1(-2n) + m_2(-2n - 1) + m_3, -2n + (\leftarrow), -2n + m_1(-2n + 1) + m_2(-2n) + m_3, -2n + 1 + (\leftarrow))$	$(n < 0)$
$\{2c_n, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n\}$	
$(2 + 2(m_1 + m_2), m_2, m_2, m_1, m_1)$	$(n = 0)$
$((\uparrow), 2n + m_1(n) + m_2(n + 1), (\leftarrow), 2n - 2 + m_1(n - 1) + m_2(n), (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), -2n - 2 + m_1(-n) + m_2(-n - 1), (\leftarrow), -2n + m_1(-n + 1) + m_2(-n), (\leftarrow))$	$(n < 0)$
$\{m_1 s_{n-1}, m_2 s_n, m_3 h\}$	
$(2(m_1 + m_2 + m_3), m_2 + m_3, (\leftarrow), m_1 + m_3, (\leftarrow))$	$(n = 0)$
$((\uparrow), m_1(n) + m_2(n + 1) + m_3, (\leftarrow), m_1(n - 1) + m_2(n) + m_3, (\leftarrow))$	$(n > 0)$
$((\uparrow), m_1(-n) + m_2(-n - 1) + m_3, (\leftarrow), m_1(-n + 1) + m_2(-n) + m_3, (\leftarrow))$	$(n < 0)$
$\{H\}$	
$(0, 0, 1, 0, 1)$	
$\{R_n\}$	
$(0, n, n, n - 1, n)$	$(n > 0)$
$(0, -n - 1, -n - 1, -n - 1, -n)$	

以下の場合には修正切片集合が上記のいずれかに含まれる：

切片集合	$\{2\overline{c_n}, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n\}$	$\{Q\}$	$\{\overline{R_0}\}$
修正切片集合	$\{(m_1 + 1)s_{n-1}, (m_2 + 1)s_n, h\}$	$\{2h\}$	$\{r_0, r_1\}$

付録 A

定理 4.3.4 の計算

この付録では、定理 4.3.4 の証明の最後で省略した次の主張を直接計算を行うことによって示す。

命題 A.0.1 ([GY]). 仮定 4.1.5 を満たすような点付曲面 (\mathbf{S}, \mathbf{M}) と初期タグ付三角形分割 T が与えられているとする。このとき各パズル片について、交点ベクトルから対応する成分を抜き出した交点部分ベクトルを考える。その部分ベクトルに対応するそのパズル片上の修正切片の集合 $M(\delta) \cap \square$ は一意的に定まる。

証明. まず、 \square が三角片の場合を考える。部分ベクトルとしては $v|\square = (a_1, a_2, a_3)$ を考えることになる。対称性から、 $a_1 \geq a_2, a_3$ を仮定して良い。まず、次の連立方程式を考える。

$$\begin{cases} m_2 + m_3 = a_1 \\ m_3 + m_1 = a_2 \\ m_1 + m_2 = a_3. \end{cases}$$

$(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ のとき、 $S = \{m_1 e_1, m_2 e_2, m_3 e_3\}$ と決まる。以下、 $(m_1, m_2, m_3) \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ を仮定する。

- $a_2 + a_3 = a_1 - 1$ のとき、 $S = \{h_1, a_3 e_2, a_2 e_3\}$.
- $a_2 + a_3 = a_1 - 2$ のとき、 $S = \{2h_1, a_3 e_2, a_2 e_3\}$.
- $a_2 + a_3 = a_1 + 1$ のとき、 $S = \{y, (a_3 - 1)e_2, (a_2 - 1)e_3\}$.
- $a_2 + a_3 = a_1 + 2$ のとき、 $S = \{y, e_1, (a_3 - 2)e_2, (a_2 - 2)e_3\}$.

表 4.5 から、これで (a_1, a_2, a_3) のすべてのケースを尽くしている。したがって $v|\square$ によって S_\square は一意的に定まる。

次に \square が 1 孔片であるとする。部分ベクトルとしては $v|\square = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ を考えることになる。対称性から、 $a_1 \leq a_2$ として良い。

- a) $a_3 = a_4$ の場合を考える。このとき S は表 A.1 のうちのどれかである。
- a1) $a_1 - a_2 + 2a_3 = -2$ のとき、 $S = \{2r_-, a_3 r, a_1 u\}$.
 - a2) $a_1 - a_2 + 2a_3 = -1$ のとき、 $S = \{r_-, a_3 r, a_1 u\}$.
 - a3) $a_1 - a_2 + 2a_3 = 0$ 、 $S = \{a_3 r, a_1 u\}$.
 - a4) $a_1 - a_2 + 2a_3 = 1$ のとき、 S は $\{r_+, m_1 r\}$ または $\{y_r, m_1 r, m_2 u\}$.
- * $a_1 + a_2 - 2a_3 = -1$ のとき、 $S = \{r_+, (a_3 - 1)r\}$.

表 A.1 1 孔片における $a_3 = a_4$ を満たす S 一覧

S	$a_1 - a_2 + 2a_3$	$a_1 + a_2 - 2a_3$
$\{m_1r, m_2u, m_3d\}$	$2m_3$	$2m_2$
$\{r_+, m_1r, m_3d\}$	$1 + 2m_3$	-1
$\{2r_+, m_1r, m_3d\}$	$2 + 2m_3$	-2
$\{r_-, m_1r, m_2u\}$	-1	$1 + 2m_2$
$\{2r_-, m_1r, m_2u\}$	-2	$2 + 2m_2$
$\{y_r, m_1r, m_3d\}$	$1 + 2m_3$	1
$\{y_r, u, m_1r, m_3d\}$	$1 + 2m_3$	3
$\{y_r, m_1r, m_2u\}$	1	$1 + 2m_2$
$\{y_r, d, m_1r, m_2u\}$	3	$1 + 2m_2$

- * $a_1 + a_2 - 2a_3 \neq -1$ のとき, $S = \{y_r, (a_3 - 1)r, (a_1 - 1)u\}$.
- a5) $a_1 - a_2 + 2a_3 = 2$ のとき, S は $\{m_1r, m_2u, d\}$ または $\{2r_+, m_1r\}$.
- * $a_1 + a_2 - 2a_3 = -2$ のとき, $S = \{2r_+, (a_3 - 2)r\}$.
- * $a_1 + a_2 - 2a_3 \neq -2$ のとき, $S = \{(a_3 - 1)r, (a_1 - 1)u, d\}$.
- a6) $a_1 - a_2 + 2a_3 = 3$ のとき, S は $\{r_+, m_1r, d\}$ または $\{y_r, d, m_1r, m_2u\}$.
- * $a_1 + a_2 - 2a_3 = -1$ のとき, $S = \{r_+, (a_3 - 2)r, d\}$.
- * $a_1 + a_2 - 2a_3 \neq -1$ のとき, $S = \{y_r, d, (a_3 - 2)r, (a_1 - 2)u\}$.
- a7) $a_1 - a_2 + 2a_3 \in 2\mathbb{Z}_{\geq 2}$ のとき, S は $\{m_1r, m_2u, m_3d\}$ または $\{2r_+, m_1r, m_3d\}$.
- * $a_1 + a_2 - 2a_3 = -2$ のとき, $S = \{2r_+, (a_3 - a_1 - 2)r, a_1d\}$.
- * $a_1 + a_2 - 2a_3 \neq -2$ のとき, $S = \{\frac{1}{2}(a_2 - a_1)r, (\frac{1}{2}(a_1 + a_2) - a_3)u, (\frac{1}{2}(a_1 - a_2) + a_3)d\}$.
- a8) $a_1 - a_2 + 2a_3 \in 2\mathbb{Z}_{\geq 2} + 1$ のとき, S は $\{r_+, m_1r, m_3d\}$, $\{y_r, m_1r, m_3d\}$, $\{y_r, u, m_1r, m_3d\}$ のうちのどれか.
- * $a_1 + a_2 - 2a_3 = -1$ のとき, $S = \{r_+, (a_3 - a_1 - 1)r, a_1d\}$.
- * $a_1 + a_2 - 2a_3 = 1$ のとき, $S = \{y_r, (a_3 - a_1)r, (a_1 - 1)d\}$.
- * $a_1 + a_2 - 2a_3 = 3$ のとき, $S = \{y_r, u, (a_3 - a_1 + 1)r, (a_1 - 2)d\}$.
- b) $a_4 - a_3 = 1$ を仮定する. このとき, S は表 A.2 にあるうちのどれかである.
- b1) $a_1 - a_2 + 2a_3 \in 2\mathbb{Z} + 1$ のとき, $S = \{r_p, \frac{1}{2}(a_2 - a_1 - 1)r, (\frac{1}{2}(a_1 + a_2 - 1) - a_3)u, (\frac{1}{2}(a_1 - a_2 + 1) + a_3)d\}$.
- b2) $a_1 - a_2 + 2a_3 = -2$ のとき, $S = \{r_p, r_-, a_3r, a_1u\}$.
- b3) $a_1 - a_2 + 2a_3 = 0$ かつ $a_1 + a_2 - 2a_3 = 0$ のとき, S は $\{r_p, r_+, m_1r\}$ または $\{P_+\}$.
- * $a_3 = 0$ のとき, $S = \{P_+\}$.

表 A.2 1 孔片における $a_4 - a_3 = 1$ を満たす S 一覧

S	$a_1 - a_2 + 2a_3$	$a_1 + a_2 - 2a_3$
$\{r_p, m_1r, m_2u, m_3d\}$	$-1 + 2m_3$	$1 + 2m_2$
$\{r_p, r_+, m_1r, m_3d\}$	$2m_3$	0
$\{r_p, r_-, m_1r, m_2u\}$	-2	$2 + 2m_2$
$\{r_p, y_r, m_1r, m_3d\}$	$2m_3$	2
$\{r_p, y_r, u, m_1r, m_3d\}$	$2m_3$	4
$\{r_p, y_r, m_1r, m_2u\}$	0	$2 + 2m_2$
$\{r_p, y_r, d, m_1r, m_2u\}$	2	$4 + 2m_2$
$\{P_+\}$	0	0
$\{\overline{P_+}\}$	0	2
$\{\overline{P_+}, d\}$	2	2

- * $a_3 \neq 0$ のとき, $S = \{r_p, r_+, (a_3 - 1)r\}$.
- b4) $a_1 - a_2 + 2a_3 = 0$ かつ $a_1 + a_2 - 2a_3 = 2$ のとき, S は $\{r_p, y_r, m_1r\}$ または $\{\overline{P_+}\}$.
- * $a_3 = 0$ のとき, $S = \{\overline{P_+}\}$.
- * $a_3 \neq 0$ のとき, $S = \{r_p, y_r, (a_3 - 1)r\}$.
- b5) $a_1 - a_2 + 2a_3 = 0$ かつ $a_1 + a_2 - 2a_3 \geq 4$ のとき, $S = \{r_p, y_r, (a_3 - 1)r, (a_1 - 1)u\}$.
- b6) $a_1 - a_2 + 2a_3 = 2$ かつ $a_1 + a_2 - 2a_3 = 0$ のとき, $S = \{r_p, r_+, m_1r, d\}$.
- b7) $a_1 - a_2 + 2a_3 = 2$ かつ $a_1 + a_2 - 2a_3 = 2$ のとき, S は $\{r_p, y_r, m_1r, d\}$ または $\{\overline{P_+}, d\}$.
- * $a_3 = 1$ のとき, $S = \{\overline{P_+}, d\}$.
- * $a_3 \neq 1$ のとき, $S = \{r_p, y_r, (a_3 - 2)r, d\}$.
- b8) $a_1 - a_2 + 2a_3 = 2$ かつ $a_1 + a_2 - 2a_3 \geq 4$ のとき, $S = \{r_p, y_r, d, (a_3 - 2)r, (a_1 - 2)u\}$.
- b9) $a_1 - a_2 + 2a_3 \in 2\mathbb{Z}_{\geq 2}$ かつ $a_1 + a_2 - 2a_3 = 0$ のとき, $S = \{r_p, r_+, (a_3 - a_1 - 1)r, a_1d\}$.
- b10) $a_1 - a_2 + 2a_3 \in 2\mathbb{Z}_{\geq 2}$ かつ $a_1 + a_2 - 2a_3 = 2$ のとき, $S = \{r_p, y_r, (a_3 - a_1)r, (a_1 - 1)d\}$.
- b11) $a_1 - a_2 + 2a_3 \in 2\mathbb{Z}_{\geq 2}$ かつ $a_1 + a_2 - 2a_3 = 4$ のとき, $S = \{r_p, y_r, u, (a_3 - a_1 + 1)r, (a_1 - 2)d\}$.
- c) $a_4 - a_3 = 2$ を仮定する. このとき, S は $\{2r_p, m_1r, m_2u, m_3d\}$ または $\{r_p, l_p, m_2u, m_3d\}$.
- c1) $a_1 = a_2$ のとき, $S = \{r_p, l_p, (a_1 - a_3 - 1)u, a_3d\}$.
- c2) $a_1 \neq a_2$ のとき, $S = \{2r_p, \frac{1}{2}(a_2 - a_1 - 2)r, (\frac{1}{2}(a_1 + a_2) - a_3 - 1)u, (\frac{1}{2}(a_1 - a_2) + a_3 + 1)d\}$.

表 4.6 から, これで (a_1, a_2, a_3, a_4) のすべてのケースを尽くしている. したがって, $v|_{\square}$ から S_{\square} が一意的に定まる.

最後に, \square が 2 孔片の場合を考える. 部分ベクトルとしては $v|_{\square} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ を考える.

対称性から, $a_3 - a_2 \leq a_5 - a_4$ を仮定して良い. 表 A.3 のように場合分けして考える.

表 A.3 2 孔片の場合分け

		$a_1 = 0$	a)	
$a_1 \neq 0$	$a_1 : \text{odd}$	$a_5 - a_4 = 0$	b)	
		$a_5 - a_4 \neq 0$	c)	
	$a_1 : \text{even}$	$a_5 - a_4 = 2$	d)	
		$a_5 - a_4 = 1$	$a_3 - a_2 = 0$	e)
			$a_3 - a_2 = 1$	f)
	$a_5 - a_4 = 0$	g)		

- a) $\{H\}, \{R_n\}$
b) $\{c_n, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n\}, \{\overline{c_n}, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n\}, \{\overline{c_n}, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n, h\}$
c) $\{r_n, m_1 s_{2n-2}, m_2 s_{2n-1}, m_3 h\}$ ($m_1 \neq 0$), $\{r_n, m_1 s_{2n-1}, m_2 s_{2n}, m_3 h\}$
d) $\{2r_n, m_1 s_{2n-2}, m_2 s_{2n-1}, m_3 h\}$ ($m_1 \neq 0$), $\{2r_n, m_1 s_{2n-1}, m_2 s_{2n}, m_3 h\}, \{r_n, r_{n+1}, m_1 s_{2n}, m_3 h\}$
e) $\{\overline{R_n}\}$ ($n \neq 0$), $\{r_n, c_{i+1}, m_1 s_i, m_2 s_{i+1}\}, \{r_n, \overline{c_{i+1}}, m_1 s_i, m_2 s_{i+1}\}$ ($i = 2n-2$ または $2n-1$)
f) $\{r_n, l_{n-1}, m_1 s_{2n-2}, m_2 s_{2n-1}, m_3 h\}, \{r_n, l_n, m_1 s_{2n-1}, m_2 s_{2n}, m_3 h\}$
g) $\{2c_n, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n\}, \{m_1 s_{n-1}, m_2 s_n, m_3 h\}$ ($n > 0, m_2 \neq 0, n < 0, m_1 \neq 0$)

a) $a_1 = 0$ を仮定する. $a_2 = 0$ のとき, $S = \{H\}$. $a_2 \neq 0$ のとき, $S = \{R_{a_2}\}$.

b) $a_1 \neq 0$ が奇数かつ $a_5 - a_4 = 0$ を仮定する. このとき, S は次のうちのどれか.

$$\{c_n, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n\}, \{\overline{c_n}, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n\}, \{\overline{c_n}, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n, h\}.$$

$$m = \frac{a_1 - 1}{2}.$$

としておく.

b1) $|a_2 - a_4| > m$ のとき, $S = \{c_n, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n\}$ ($n \neq 0$).

b1i) $a_2 - a_4 > m$ のとき, $n > 0$. このとき,

$$n + mn \leq a_2 \leq n + m(n+1),$$

したがって

$$\frac{a_2 - m}{m+1} \leq n \leq \frac{a_2}{m+1}.$$

このとき,

$$\frac{a_2}{m+1} - \frac{a_2 - m}{m+1} = \frac{m}{m+1} < 1,$$

であるから, n は

$$\left\lfloor \frac{a_2}{m+1} \right\rfloor,$$

と定まる. ただし, $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$. ここで, $m_2 = a_2 - (m+1)n$ かつ $m_1 = m - m_2$, すなわち,

$S = \left\{ c_n, \left(\frac{n+1}{2}a_1 - a_2 + \frac{n-1}{2} \right) s_{n-1}, \left(-\frac{n}{2}a_1 + a_2 - \frac{n}{2} \right) s_n \right\}, n = \left\lfloor \frac{2a_2}{a_1 + 1} \right\rfloor$.
を得る.

b1ii) $a_2 - a_4 < -m$ のとき, $n < 0$. b1i) と同様の方法で,

$$n = \left\lfloor \frac{-a_2 - 1}{m + 1} \right\rfloor, m_1 = a_2 + (m + 1)n + m + 1 \text{ かつ } m_2 = m - m_1,$$

すなわち,

$S = \left\{ c_n, \left(\frac{n+1}{2}a_1 + a_2 + \frac{n+1}{2} \right) s_{n-1}, \left(-\frac{n}{2}a_1 - a_2 - \frac{n+2}{2} \right) s_n \right\}, n = \left\lfloor \frac{-2(a_2 + 1)}{a_1 + 1} \right\rfloor$.
を得る.

b2) $|a_2 - a_4| \leq m$ のとき, $S = \{c_0, m_1 s_{-1}, m_2 s_0\}$, $S = \{\bar{c}_n, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n\}$ または
 $\{\bar{c}_n, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n, h\}$.

b2i) $a_2 + a_4 \leq m$ のとき, $S = \{c_0, a_4 s_{-1}, a_2 s_0\}$.

b2ii) $a_2 + a_4 = m + 1$ のとき,

$$S = \{\bar{c}_0, (m - a_2) s_{-1}, (m - a_4) s_0\} = \{\bar{c}_0, (\frac{1}{2}a_1 - a_2 - \frac{1}{2}) s_{-1}, (\frac{1}{2}a_1 - a_4 - \frac{1}{2}) s_0\}.$$

b2iii) $a_2 + a_4 = m + 2$ のとき, S は次のうちのどれかである.

$$\{\bar{c}_1, (a_2 - 2) s_0\}, \{\bar{c}_{-1}, (a_4 - 2) s_{-1}\}, \{\bar{c}_0, (m - a_2) s_{-1}, (m - a_4) s_0, h\}.$$

$a_4 = 1$ のとき, $S = \{\bar{c}_1, (a_2 - 2) s_0\}$. $a_2 = 1$ のとき, $S = \{\bar{c}_{-1}, (a_4 - 2) s_{-1}\}$. それ以外
のとき,

$$S = \{\bar{c}_0, (m - a_2) s_{-1}, (m - a_4) s_0, h\} = \{\bar{c}_0, (\frac{1}{2}a_1 - a_2 - \frac{1}{2}) s_{-1}, (\frac{1}{2}a_1 - a_4 - \frac{1}{2}) s_0, h\}.$$

b2iv) $a_2 + a_4 > m + 2$ かつ $|a_2 - a_4| = m$ のとき, $S = \{\bar{c}_n, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n\}$, $n \neq 0$ で, かつ
(b2iii) に属さないものである. b1i) と同様の方法で, $a_2 - a_4 = m$ のとき,

$$n = \left\lfloor \frac{2(a_2 - 1)}{a_1 - 1} \right\rfloor, m_2 = a_2 - mn - 1 \text{ かつ } m_1 = m - 1 - m_2,$$

すなわち,

$$S = \left\{ \bar{c}_n, \left(\frac{n+1}{2}a_1 - a_2 - \frac{n+1}{2} \right) s_{n-1}, \left(-\frac{n}{2}a_1 + a_2 + \frac{n-2}{2} \right) s_n \right\}, n = \left\lfloor \frac{2(a_2 - 1)}{a_1 - 1} \right\rfloor.$$

を得る.

$a_2 - a_4 = -m$ のとき,

$$n = \left\lfloor -\frac{2a_2}{a_1 - 1} \right\rfloor, m_1 = a_2 + mn + m - 1 \text{ かつ } m_2 = m - 1 - m_1,$$

すなわち,

$S = \left\{ \bar{c}_n, \left(\frac{n+1}{2}a_1 + a_2 - \frac{n+3}{2} \right) s_{n-1}, \left(-\frac{n}{2}a_1 - a_2 + \frac{n}{2} \right) s_n \right\}, n = \left\lfloor -\frac{2a_2}{a_1 - 1} \right\rfloor$.
を得る.

b2v) $a_2 + a_4 > m + 2$ かつ $|a_2 - a_4| = m - 1$ のとき, $S = \{\bar{c}_n, m_1 s_{n-1}, m_2 s_n, h\}$, $n \neq 0$ かつ
(b2iii) に属さないものである. b1i) と同様の方法によつて, $a_2 - a_4 = m - 1$ のとき,

$$n = \left\lfloor \frac{2(a_2 - 2)}{a_1 - 3} \right\rfloor, m_2 = a_2 - (m - 1)n - 2 \text{ かつ } m_1 = m - 2 - m_2,$$

すなわち,

$S = \left\{ \bar{c}_n, \left(\frac{n+1}{2}a_1 - a_2 - \frac{3n+1}{2} \right) s_{n-1}, \left(-\frac{n}{2}a_1 + a_2 + \frac{3n-4}{2} \right) s_n, h \right\}, n = \left\lfloor \frac{2(a_2-2)}{a_1-3} \right\rfloor$
を得る.

$a_2 - a_4 = -m + 1$ のとき,

$$n = \left\lfloor \frac{2(a_2-2)}{a_1-3} \right\rfloor, m_1 = a_2 + (m-1)n + m - 3 \text{ かつ } m_2 = m - 2 - m_1,$$

すなわち,

$S = \left\{ \bar{c}_n, \left(\frac{n+1}{2}a_1 + a_2 - \frac{3n+7}{2} \right) s_{n-1}, \left(-\frac{n}{2}a_1 - a_2 + \frac{3n+2}{2} \right) s_n, h \right\}, n = \left\lfloor \frac{-2a_2+2}{a_1-3} \right\rfloor$
を得る.

c) $a_1 \neq 0$ が奇数かつ $a_5 - a_4 \neq 0$ を仮定する. このとき, S は次のうちのどれかである.

$$\{r_n, m_1 s_{2n-2}, m_2 s_{2n-1}, m_3 h\}, \{r_n, m_1 s_{2n-1}, m_2 s_{2n}, m_3 h\}.$$

m を次のように定める.

$$m = \frac{a_1 - 1}{2}.$$

c1) $a_2 \leq m$ のとき, $S = \{r_0, m_1 s_i, m_2 s_{i+1}, m_3 h\}$ ($i = 2n - 2$ または $2n - 1$).

$a_4 > m$ のとき,

$$S = \left\{ r_0, \left(-\frac{1}{2}a_1 + a_4 + \frac{1}{2} \right) s_{-2}, \left(\frac{1}{2}a_1 - a_2 - \frac{1}{2} \right) s_{-1}, \left(\frac{1}{2}a_1 + a_2 - a_4 - \frac{1}{2} \right) h \right\}.$$

$a_4 \leq m$ のとき,

$$S = \left\{ r_0, \left(\frac{1}{2}a_1 - a_2 - \frac{1}{2} \right) s_{-2}, \left(\frac{1}{2}a_1 - a_4 - \frac{1}{2} \right) s_{-1}, \left(-\frac{1}{2}a_1 + a_2 + a_4 + \frac{1}{2} \right) h \right\}.$$

c2) $a_2 > m$ のとき, $S = \{r_n, m_1 s_i, m_2 s_{i+1}, m_3 h\}$ ($n \neq 0$) かつ $i = 2n - 2$ または $2n - 1$.

c2i) $a_2 - a_4 > 0$ のとき, $n > 0$ かつ $m_3 = m - (a_2 - a_4 - 1)$. このとき,

$$n + (m - m_3)(2n - 1) + m_3 \leq a_2 \leq n + (m - m_3)(2n + 1) + m_3,$$

したがって

$$\frac{a_2 - m}{2m - 2m_3 + 1} \leq n \leq \frac{a_2 + m - 2m_3}{2m - 2m_3 + 1}.$$

ここで,

$$\frac{a_2 + m - 2m_3}{2m - 2m_3 + 1} - \frac{a_2 - m}{2m - 2m_3 + 1} = \frac{2m - 2m_3}{2m - 2m_3 + 1} < 1,$$

より, n は

$$\left\lfloor \frac{a_2 + m - 2m_3}{2m - 2m_3 + 1} \right\rfloor.$$

として一意的に与えられる. $f = a_2 - (n + (m - m_3)(2n - 1) + m_3)$ とする. $0 \leq f < m - m_3$ のとき,

$$\begin{aligned} S &= \{r_n, (m - m_3 - f) s_{2n-2}, f s_{2n-1}, m_3 h\} \\ &= \left\{ r_n, \left(\frac{1}{2}a_1 + (2n - 2)a_2 - (2n - 1)a_4 - \frac{2n-1}{2} \right) s_{2n-2}, \right. \\ &\quad \left. \left(-\frac{1}{2}a_1 + (-2n + 3)a_2 + (2n - 2)a_4 + \frac{2n-3}{2} \right) s_{2n-1}, \left(\frac{1}{2}a_1 - a_2 + a_4 + \frac{1}{2} \right) h \right\}, \\ & m - m_3 \leq f \leq 2(m - m_3) \text{ のとき,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= \{r_n, (2(m - m_3) - f)s_{2n-1}, (f - (m - m_3))s_{2n}, m_3h\} \\
&= \left\{ r_n, \left(\frac{1}{2}a_1 + (2n - 1)a_2 - 2na_4 - \frac{2n+1}{2} \right) s_{2n-1}, \right. \\
&\quad \left. \left(-\frac{1}{2}a_1 - (2n - 2)a_2 + (2n - 1)a_4 + \frac{2n-1}{2} \right) s_{2n}, \left(\frac{1}{2}a_1 - a_2 + a_4 + \frac{1}{2} \right) h \right\},
\end{aligned}$$

ただし,

$$n = \left\lfloor \frac{-a_1 + 6a_2 - 4a_4 - 3}{2(2a_2 - 2a_4 - 1)} \right\rfloor.$$

c2ii) $a_2 - a_4 \leq 0$ のとき, $n < 0$ かつ $m_3 = m - (a_4 - a_2)$. c2i) と同様の方法で, n は

$$\left\lfloor \frac{m - a_2}{2m - 2m_3 + 1} \right\rfloor.$$

として与えられる. $f = a_2 - (-n - (m - m_3)(2n + 1) + m_3)$ とする. $0 \leq f \leq m - m_3$ のとき,

$$\begin{aligned}
S &= \{r_n, fs_{2n-1}, (m - m_3 - f)s_{2n}, m_3h\} \\
&= \left\{ r_n, \left(-\frac{1}{2}a_1 - (2n + 1)a_2 + (2n + 2)a_4 + \frac{2n+1}{2} \right) s_{2n-1}, \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{1}{2}a_1 + 2na_2 - (2n + 1)a_4 - \frac{2n+1}{2} \right) s_{2n}, \left(\frac{1}{2}a_1 + a_2 - a_4 - \frac{1}{2} \right) h \right\},
\end{aligned}$$

$m - m_3 < f \leq 2(m - m_3)$ のとき,

$$\begin{aligned}
S &= \{r_n, (f - (m - m_3))s_{2n-2}, (2(m - m_3) - f)s_{2n-1}, m_3h\} \\
&= \left\{ r_n, \left(-\frac{1}{2}a_1 - 2na_2 + (2n + 1)a_4 + \frac{2n+1}{2} \right) s_{2n-2}, \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{1}{2}a_1 + (2n - 1)a_2 - 2na_4 - \frac{2n+1}{2} \right) s_{2n-1}, \left(\frac{1}{2}a_1 + a_2 - a_4 - \frac{1}{2} \right) h \right\},
\end{aligned}$$

ただし,

$$n = \left\lfloor \frac{m - a_2}{2m - 2m_3 + 1} \right\rfloor.$$

d) $a_1 \neq 0$ が偶数かつ $a_5 - a_4 = 2$ であるとする. このとき, S は次のうちのどれかである.

$$\{2r_n, m_1s_{2n-2}, m_2s_{2n-1}, m_3h\}, \{2r_n, m_1s_{2n-1}, m_2s_{2n}, m_3h\}, \{r_n, r_{n+1}, m_1s_{2n}, m_3h\}.$$

まず,

$$m = \frac{a_1 - 2}{2}.$$

と定める.

d1) $a_2 = m + 1$ を仮定する. $a_2 \leq a_4$ のとき, $S = \{r_{-1}, r_0, (a_4 - a_2)s_{-2}, (m + a_2 - a_4)h\}$.

$a_2 > a_4$ のとき, $S = \{r_0, r_1, (a_2 - a_4 - 1)s_0, a_4h\}$.

d2) $a_2 < m + 1$ を仮定する. $a_4 > m$ のとき,

$$\begin{aligned}
S &= \{2r_0, (a_4 - m)s_{-2}, (m - a_2)s_{-1}, (m + a_2 - a_4)h\} \\
&= \{2r_0, (-\frac{1}{2}a_1 + a_4 + 1)s_{-2}, (\frac{1}{2}a_1 - a_2 - 1)s_{-1}, (\frac{1}{2}a_1 + a_2 - a_4 - 1)h\}.
\end{aligned}$$

$a_4 \leq m$ のとき,

$$\begin{aligned}
S &= \{2r_0, (m - a_2)s_{-1}, (m - a_4)s_0, (a_2 + a_4 - m)h\} \\
&= \{2r_0, (\frac{1}{2}a_1 - a_2 - 1)s_{-1}, (\frac{1}{2}a_1 - a_4 - 1)s_0, (-\frac{1}{2}a_1 + a_2 + a_4 + 1)h\}.
\end{aligned}$$

d3) $a_2 > m + 1$ を仮定する.

d3i) $a_2 - a_4 > 0$ のとき, $n > 0$ かつ $m_3 = m - a_2 + a_4 + 2$ となる.

このとき, $S = \{2r_n, m_1 s_{2n-2}, m_2 s_{2n-1}, m_3 h\}$ または $\{2r_n, m_1 s_{2n-1}, m_2 s_{2n}, m_3 h\}$ ならば, a_2 は

$$2n + (m - m_3)(2n - 1) + m_3 \leq a_2 \leq 2n + (m - m_3)(2n + 1) + m_3$$

を満たす. とくに, $n' \in \mathbb{Z}$ で $a_2 = 2n' + 1 + (m - m_3)(2n' + 1) + m_3$ を満たすものが存在しない. 逆にこのような $n' \in \mathbb{Z}$ が存在するとき,

$$S = \{r_n, r_{n+1}, (a_2 - a_4 - 2)s_{2n}, (m - a_2 + a_4 + 2)h\},$$

ただし,

$$n = n' = \frac{a_2 - m - 1}{2(m - m_3) + 2}.$$

存在しない時は c2i) と同様の方法で

$$n = \left\lfloor \frac{a_2 + m - 2m_3}{2(m - m_3) + 2} \right\rfloor.$$

を得る. $f = a_2 - (2n + (m - m_3)(2n - 1) + m_3)$. $0 \leq f \leq m - m_3$ とおくと,

$$\begin{aligned} S &= \{2r_n, (m - m_3 - f)s_{2n-2}, f s_{2n-1}, m_3 h\} \\ &= \{r_n, \left(\frac{1}{2}a_1 + (2n - 2)a_2 - (2n - 1)a_4 - 2n + 1\right)s_{2n-2}, \\ &\quad \left(-\frac{1}{2}a_1 - (2n - 3)a_2 + (2n - 2)a_4 + 2n - 3\right)s_{2n-1}, \left(\frac{1}{2}a_1 - a_2 + a_4 + 1\right)h\}, \end{aligned}$$

を得る. $m - m_3 < f \leq 2(m - m_3)$ のとき,

$$\begin{aligned} S &= \{2r_n, (2(a_2 - a_4 - 2) - f)s_{2n-1}, (f + a_2 - a_4 - 2)s_{2n}, m_3 h\} \\ &= \{2r_n, \left(\frac{1}{2}a_1 + (2n - 1)a_2 - 2na_4 - 2n - 1\right)s_{2n-1}, \\ &\quad \left(-\frac{1}{2}a_1 - (2n - 2)a_2 + (2n - 1)a_4 + 2n - 1\right)s_{2n}, \left(\frac{1}{2}a_1 - a_2 + a_4 + 1\right)h\}, \end{aligned}$$

となる. ただし,

$$n = \left\lfloor \frac{a_2 + m - 2m_3}{2(m - m_3) + 2} \right\rfloor.$$

d3ii) $a_2 - a_4 < 0$ のとき, $n < 0$ かつ $m_3 = m + a_2 - a_4$. d3i) と同様の方法により, $n' \in \mathbb{Z}$ で $a_2 = -2n' - 1 + (m - m_3)(-2n' - 1) + m_3$ を満たすものが存在するとき,

$$S = \{r_n, r_{n+1}, (-a_2 + a_4)s_{2n}, (m + a_2 - a_4)h\},$$

ただし,

$$n = n' = \left\lfloor \frac{-m + 2m_3 - a_2 + 1}{2(m - m_3) + 2} \right\rfloor.$$

存在しない時,

$$n = \left\lfloor \frac{m - a_2}{2(m - m_3) + 2} \right\rfloor$$

かつ, S は次のようにして得られる. $f = a_2 - (-2n + (m - m_3)(-2n - 1) + m_3)$ とおくと. $0 \leq f \leq m - m_3$ のとき,

$$\begin{aligned} S &= \{2r_n, f s_{2n-1}, (m - m_3 - f)s_{2n}, m_3 h\} \\ &= \{2r_n, \left(-\frac{1}{2}a_1 - (2n + 1)a_2 + (2n + 2)a_4 + 2n + 1\right)s_{2n-1}, \\ &\quad \left(\frac{1}{2}a_1 + 2na_2 - (2n + 1)a_4 - 2n - 1\right)s_{2n}, \left(\frac{1}{2}a_1 + a_2 - a_4 - 1\right)h\}, \end{aligned}$$

$m - m_3 < f \leq 2(m - m_3)$ のとき,

$$\begin{aligned}
S &= \{2r_n, (f - m + m_3)s_{2n-2}, (2(m - m_3) - f)s_{2n-1}, m_3h\} \\
&= \{2r_n, (-\frac{1}{2}a_1 - 2na_2 + (2n + 1)a_4 + 2n + 1)s_{2n-2}, \\
&\quad (\frac{1}{2}a_1 + (2n - 1)a_2 - 2na_4 - 2n - 1)s_{2n-1}, (\frac{1}{2}a_1 + a_2 - a_4 - 1)h\},
\end{aligned}$$

ただし,

$$n = \left\lfloor \frac{m - a_2}{2(m - m_3) + 2} \right\rfloor.$$

e) $a_1 \neq 0$ が偶数, $a_5 - a_4 = 1$ かつ $a_3 - a_2 = 0$ を仮定する. このとき, S は次のうちのいずれかである.

$$\{\overline{R_n}\} (n \neq 0), \{r_n, c_{i+1}, m_1s_i, m_2s_{i+1}\}, \{r_n, \overline{c_{i+1}}, m_1s_i, m_2s_{i+1}\} \quad (i = 2n - 2 \text{ または } 2n - 1).$$

$a_1 = 2, a_2 \neq 0, |a_2 - a_4| \leq 1$ かつ $|a_2 - a_5| \leq 1$ を仮定する. $|a_2 - a_4| = 1$ のとき, $S = \{\overline{R_{a_4}}\}$. $|a_2 - a_4| = 0$ のとき, $S = \{\overline{R_{-a_4}}\}$. それ以外の時, $S = \{r_n, c_{i+1}, m_1s_i, m_2s_{i+1}\}$ または $\{r_n, \overline{c_{i+1}}, m_1s_i, m_2s_{i+1}\}$ である.

$$m = \frac{a_1 - 2}{2}.$$

と定める.

e1) $a_2 \leq m$ のとき, $n = 0$.

e1i) $a_4 > m$ を仮定する. $a_4 - a_2 = m + 1$ のとき,

$$S = \{r_0, c_{-1}, a_2s_{-2}, (\frac{1}{2}a_1 - a_2 - 1)s_{-1}\}.$$

それ以外のとき,

$$S = \{r_0, \overline{c_{-1}}, (a_2 - 1)s_{-2}, (\frac{1}{2}a_1 - a_2 - 1)s_{-1}\}.$$

e1ii) $a_4 \leq m$ を仮定する. $a_2 + a_4 = m$ のとき,

$$S = \{r_0, c_0, a_4s_{-1}, a_2s_0\}.$$

それ以外のとき,

$$S = \{r_0, \overline{c_0}, (a_4 - 1)s_{-1}, (a_2 - 1)s_0\}.$$

e2) $a_2 > m$ を仮定する. このとき, $n \neq 0$.

e2i) $a_2 - a_4 > 0$ のとき, $n > 0$. $a_2 - a_4 = m + 2$ を仮定する. b1i) のときと同様に, n は

$$\left\lfloor \frac{a_2 + m + 1}{2m + 3} \right\rfloor.$$

として与えられる. $f = a_2 - (3n - 1 + m(2n - 1))$ とする. $0 \leq f \leq m$ のとき,

$$S = \{r_n, c_{2n-1}, (m - f)s_{2n-2}, fs_{2n-1}\}$$

$$= \{r_n, c_{2n-1}, (na_1 - a_2 + n - 1)s_{2n-2}, ((-n + \frac{1}{2})a_1 + a_2 - n)s_{2n-1}\},$$

$m + 1 \leq f \leq 2m + 1$ のとき,

$$S = \{r_n, c_{2n}, (2m + 1 - f)s_{2n-1}, (f - m - 1)s_{2n}\}$$

$$= \{r_n, c_{2n}, ((n + \frac{1}{2})a_1 - a_2 + n - 1)s_{2n-1}, (-na_1 + a_2 - n)s_{2n}\},$$

ただし,

$$n = \left\lfloor \frac{a_1 + 2a_2}{2(a_1 + 1)} \right\rfloor.$$

$a_2 - a_4 \neq m + 2$ を仮定する. このとき, n は

と一意的に与えられる． $f = a_2 - (3n + (m-1)(2n-1))$ に対して， $0 \leq f \leq m-1$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} S &= \{r_n, \overline{c_{2n-1}}, (m-1-f)s_{2n-2}, fs_{2n-1}\} \\ &= \{r_n, \overline{c_{2n-1}}, (na_1 - a_2 - n)s_{2n-2}, ((-n + \frac{1}{2})a_1 + a_2 + n - 2)s_{2n-1}\}, \\ m \leq f \leq 2m-1 \text{ のとき,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \{r_n, \overline{c_{2n}}, (2m-1-f)s_{2n-1}, (f-m)s_{2n}\} \\ &= \{r_n, \overline{c_{2n}}, ((n + \frac{1}{2})a_1 - a_2 - n - 1)s_{2n-1}, (-na_1 + a_2 + n - 1)s_{2n}\}, \end{aligned}$$

ただし，

$$n = \left\lfloor \frac{a_1 + 2a_2 - 4}{2(a_1 - 1)} \right\rfloor.$$

e2ii) $a_2 - a_4 \leq 0$ のとき， $n < 0$ である． $a_2 - a_4 = -m - 1$ を仮定する．上と同様の方法により， n は

$$\left\lfloor \frac{-a_2 + m}{2m + 3} \right\rfloor.$$

と一意的に与えられる． $f = a_2 - (-3n - 1 + m(-2n - 1))$ とする． $0 \leq f \leq m$ のとき，

$$\begin{aligned} S &= \{r_n, c_{2n}, fs_{2n-1}, (m-f)s_{2n}\} \\ &= \{r_n, c_{2n}, ((n + \frac{1}{2})a_1 + a_2 + n)s_{2n-1}, (-na_1 - a_2 - n - 1)s_{2n}\}, \end{aligned}$$

一方 $m+1 \leq f \leq 2m+1$ のとき，

$$\begin{aligned} S &= \{r_n, c_{2n-1}, (f-m-1)s_{2n-2}, (2m+1-f)s_{2n-1}\} \\ &= \{r_n, c_{2n-1}, (na_1 + a_2 + n)s_{2n-2}, (-(n + \frac{1}{2})a_1 - a_2 - n - 1)s_{2n-1}\}, \end{aligned}$$

ただし，

$$n = \left\lfloor \frac{a_1 - 2a_2 - 2}{2(a_1 + 1)} \right\rfloor.$$

$a_2 - a_4 \neq -m - 1$ を仮定する．このとき， n は

$$\left\lfloor \frac{-a_2 + m}{2m + 1} \right\rfloor.$$

と一意的に与えられる． $f = a_2 - (-3n + (m-1)(-2n-1))$ とする． $0 \leq f \leq m-1$ のとき，

$$\begin{aligned} S &= \{r_n, \overline{c_{2n}}, fs_{2n-1}, (m-1-f)s_{2n}\} \\ &= \{r_n, \overline{c_{2n}}, ((n + \frac{1}{2})a_1 + a_2 - n - 2)s_{2n-1}, (-na_1 - a_2 + n)s_{2n}\}, \end{aligned}$$

一方 $m \leq f \leq 2m-1$ のとき，

$$\begin{aligned} S &= \{r_n, \overline{c_{2n-1}}, (f-m)s_{2n-2}, (2m-1-f)s_{2n-1}\} \\ &= \{r_n, \overline{c_{2n-1}}, (na_1 + a_2 - n - 1)s_{2n-1}, ((-n + \frac{1}{2})a_1 - a_2 + n - 1)s_{2n}\}, \end{aligned}$$

ただし，

$$n = \left\lfloor \frac{a_1 - 2a_2 - 2}{2(a_1 - 1)} \right\rfloor.$$

f) $a_1 \neq 0$ を偶数， $a_5 - a_4 = 1$ かつ $a_3 - a_2 = 1$ と仮定する．このとき， S は次のうちのどれかである：

$$\{r_n, l_{n-1}, m_1 s_{2n-2}, m_2 s_{2n-1}, m_3 h\}, \{r_n, l_n, m_1 s_{2n-1}, m_2 s_{2n}, m_3 h\}.$$

$$m = \frac{a_1 - 2}{2}.$$

とする. e) と同様に, S を構成する.

f1) $a_2 \leq m$ のとき, $n = 0$. $a_4 > m$ のとき,

$$S = \{r_0, l_{-1}, (a_4 - m)s_{-2}, (m - a_2)s_{-1}, (m + a_2 - a_4)h\}$$

$$= \{r_0, l_{-1}, (-\frac{1}{2}a_1 + a_4 + 1)s_{-2}, (\frac{1}{2}a_1 - a_2 - 1)s_{-1}, (\frac{1}{2}a_1 + a_2 - a_4 - 1)h\}.$$

それ以外の場合,

$$S = \{r_0, l_0, (m - a_2)s_{-1}, (m - a_4)s_0, (a_2 + a_4 - m)h\}$$

$$= \{r_0, l_0, (\frac{1}{2}a_1 - a_2 - 1)s_{-1}, (\frac{1}{2}a_1 - a_4 - 1)s_0, (-\frac{1}{2}a_1 + a_2 + a_4 + 1)h\}.$$

f2) $a_2 > m$ のとき, $n \neq 0$.

f2i) $a_2 - a_4 > 0$ のとき, $n > 0$ かつ $m_3 = m - (a_2 - a_4 - 1)$. さらに, n は

$$\left\lfloor \frac{a_2 + m - 2m_3 + 1}{2(m - m_3 + 1)} \right\rfloor.$$

として一意的に定まる $f = a_2 - (2n - 1 + (m - m_3)(2n - 1) + m_3)$. $0 \leq f \leq m - m_3$ のとき,

$$S = \{r_n, l_{n-1}, (m - m_3 - f)s_{2n-2}, f s_{2n-1}, m_3 h\}$$

$$= \{r_n, l_{n-1}, (\frac{1}{2}a_1 + (2n - 2)a_2 - (2n - 1)a_4 - 1)s_{2n-2},$$

$$(-\frac{1}{2}a_1 + (-2n + 3)a_2 + (2n - 2)a_4)s_{2n-1}, (\frac{1}{2}a_1 - a_2 + a_4)h\},$$

一方, $m - m_3 + 1 \leq f \leq 2(m - m_3) + 1$ のとき,

$$S = \{r_n, l_n, (2(m - m_3) + 1 - f)s_{2n-1}, (f - m + m_3 - 1)s_{2n}, m_3 h\}$$

$$= \{r_n, l_n, (\frac{1}{2}a_1 + (2n - 1)a_2 - 2na_4 - 1)s_{2n-1},$$

$$(-\frac{1}{2}a_1 + (-2n + 2)a_2 + (2n - 1)a_4)s_{2n}, (\frac{1}{2}a_1 - a_2 + a_4)h\},$$

ただし,

$$n = \left\lfloor \frac{-a_1 + 6a_2 - 4a_4}{4(a_2 - a_4)} \right\rfloor.$$

f2ii) $a_2 - a_4 \leq 0$ のとき, $n < 0$ かつ $m_3 = m + a_2 - a_4 + 1$. さらに, n は

$$\left\lfloor \frac{m - a_2}{2(m - m_3 + 1)} \right\rfloor.$$

と一意的に定まる. $f = a_2 - (-2n - 1 + (m - m_3)(-2n - 1) + m_3)$ とする. $0 \leq f \leq m - m_3$ のとき,

$$S = \{r_n, l_n, f s_{2n-1}, (m - m_3 - f)s_{2n}, m_3 h\}$$

$$= \{r_n, l_n, (-\frac{1}{2}a_1 - (2n + 1)a_2 + (2n + 2)a_4)s_{2n-1},$$

$$(\frac{1}{2}a_1 + 2na_2 - (2n + 1)a_4 - 1)s_{2n}, (\frac{1}{2}a_1 + a_2 - a_4)h\},$$

$m - m_3 + 1 \leq f \leq 2(m - m_3) + 1$ のとき,

$$\begin{aligned}
S &= \{r_n, l_{n-1}, (f - m + m_3 - 1)s_{2n-2}, (2(m - m_3) + 1 - f)s_{2n-1}, m_3h\} \\
&= \{r_n, l_n, (-\frac{1}{2}a_1 - 2na_2 + (2n + 1)a_4)s_{2n-2}, \\
&\quad (\frac{1}{2}a_1 + (2n - 1)a_2 - 2na_4 - 1)s_{2n-1}, (\frac{1}{2}a_1 + a_2 - a_4)h\},
\end{aligned}$$

ただし,

$$n = \left\lfloor \frac{a_1 - 2a_2 - 2}{4(a_2 - a_4)} \right\rfloor.$$

g) $a_1 \neq 0$ が偶数であるとする. $a_5 - a_4 = 0$. このとき, S は次のうちのいずれか.

$$\{2c_n, m_1s_{n-1}, m_2s_n\}, \{m_1s_{n-1}, m_2s_n, m_3h\},$$

ここで, $S = \{m_1s_{n-1}, m_2s_n, m_3h\}$ について次の仮定をしておく: $n > 0$ のとき $m_2 \neq 0$, $n < 0$ のとき $m_1 \neq 0$. $S = \{m_3h\}$ であるとき $n = 0$ であることに注意しておく. $m = a_1/2$ とする.

g1) $|a_2 - a_4| > m$ を仮定する. このとき $S = \{2c_n, m_1s_{n-1}, m_2s_n\}$ かつ $n \neq 0$. bli) と同様に
して, $a_2 - a_4 > m$ のとき,

$$\begin{aligned}
S &= \{2c_n, ((m + 1)n + m - a_2 - 1)s_{n-1}, (a_2 - (m + 1)n)s_n\} \\
&= \left\{ 2c_n, \left(\frac{n+1}{2}a_1 - a_2 + n - 1 \right) s_{n-1}, \left(-\frac{n}{2}a_1 + a_2 - n \right) s_n \right\},
\end{aligned}$$

ただし,

$$n = \left\lfloor \frac{a_2}{m + 1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2a_2}{a_1 + 2} \right\rfloor.$$

一方 $a_2 - a_4 < -m$ のとき,

$$\begin{aligned}
S &= \{2c_n, (a_2 + (m + 1)(n + 1))s_{n-1}, (-a_2 - (m + 1)n - 2)s_n\} \\
&= \left\{ 2c_n, \left(\frac{n+1}{2}a_1 + a_2 + n + 1 \right) s_{n-1}, \left(-\frac{n}{2}a_1 - a_2 - n - 2 \right) s_n \right\},
\end{aligned}$$

ただし,

$$n = \left\lfloor \frac{-a_2 - 2}{m + 1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-2(a_2 + 2)}{a_1 + 2} \right\rfloor.$$

g2) $|a_2 - a_4| \leq m$. を仮定する. $a_2 + a_4 < m$ のとき,

$$S = \{2c_0, a_4s_{-1}, a_2s_0\}.$$

一方 $a_2 + a_4 \geq m$ のとき,

g2i) $a_2, a_4 \leq m$ ならば

$$S = \{(\frac{1}{2}a_1 - a_2)s_{-1}, (\frac{1}{2}a_1 - a_4)s_0, (-\frac{1}{2}a_1 + a_2 + a_4)h\}.$$

g2ii) $a_2 > m$ または $a_4 > m$ のいずれか一方が成立するとき, $S = \{m_1s_{n-1}, m_2s_n, m_3h\}$ ($n \neq 0$). S は仮定より $\{m_3h\}$ でないので. $a_2 \neq a_4$. bli) と同様, $a_2 - a_4 > 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
S &= \{((a_2 - a_4)(n + 1) + m_3 - a_2)s_{n-1}, (a_2 - ((a_2 - a_4)n + m_3))s_n, (m - a_2 + a_4)h\} \\
&= \{(\frac{1}{2}a_1 + (n + 1)a_2 - na_4)s_{n-1}, (-\frac{1}{2}a_1 + (-n + 2)a_2 + (n - 1)a_4)s_n, (\frac{1}{2}a_1 - a_2 + a_4)h\},
\end{aligned}$$

ただし,

$$n = \left\lfloor \frac{2a_2 - a_4 - m}{a_2 - a_4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-a_1 + 4a_2 - 2a_4}{2(a_2 - a_4)} \right\rfloor.$$

一方 $a_2 - a_4 < 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
S &= \{(a_2 - ((-a_2 + a_4)(-n - 1) + m_3))s_{n-1}, ((-a_2 + a_4)(-n) + m_3 - a_2)s_n, (m + a_2 - a_4)h\} \\
&= \{(-\frac{1}{2}a_1 - (n + 1)a_2 + (n + 2)a_4)s_{n-1}, (\frac{1}{2}a_1 + na_2 - (n + 1)a_4)s_n, (\frac{1}{2}a_1 + a_2 - a_4)h\}, \\
&\text{ただし,}
\end{aligned}$$

$$n = \left\lfloor \frac{m - a_4}{-a_2 + a_4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_1 - 2a_4}{2(-a_2 + a_4)} \right\rfloor.$$

表 4.7 より, これで $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ のすべてのケースを尽くしている. したがって, $v|_{\square}$ によって S_{\square} は一意的に定まる. これによって命題 A.0.1 が示された. \square

参考文献

- [BFZ96] A. Brenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, *Parametrizations of canonical bases and totally positive matrices*, Adv. in Math. **122** (1996), 49–149.
- [BMR⁺06] A. B. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, and G. Todorov, *Tilting theory and cluster combinatorics*, Adv. Math. **204** (2006), 572–618.
- [CHL17] P. Cao, M. Huang, and F. Li, *A conjecture on C-matrices of cluster algebras*, 2017. preprint, arXiv:1702.01221.
- [FG09] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*, Ann. Sci. Ecole Normale. Sup. **42** (2009), no. 6, 865–930.
- [FG18] S. Fujiwara and Y. Gyoda, *Duality between front and rear mutations in cluster algebras*, 2018. preprint, arXiv:1808.02156 [math.RA].
- [FST08] S. Fomin, M. Shapiro, and D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces. part i: Cluster complexes*, Acta Math. **201** (2008), 83–146.
- [FZ02a] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster Algebra I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529.
- [FZ02b] ———, *The laurent phenomenon*, Adv. in Appl. Math. **28** (2002), no. 2, 119–144.
- [FZ03] ———, *Cluster algebras II: Finite type classification*, Invent. Math. **154** (2003), 63–121.
- [FZ07] ———, *Cluster Algebra IV: Coefficients*, Comp. Math. **143** (2007), 112–164.
- [FZW16] S. Fomin, A. Zelevinsky, and L. Williams, *Introduction to cluster algebras. chapters 1-3*, 2016. arXiv:1608.05735 [math.CO].
- [GHKK18] M. Gross, P. Hacking, S. Keel, and M. Kontsevich, *Canonical bases for cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), 497–608.
- [GY] Y. Gyoda and T. Yurikusa, *F-matrices of cluster algebras from triangulated surfaces*. in preparation.
- [IN14] K. Iwaki and T. Nakanishi, *Exact WKB analysis and cluster algebras*, J. Phys. **A 47** (2014). 474009.
- [KR84] J.P.S. Kung and G. C. Rota, *Invariant theory of binary forms*, Bull. Amer. Math. Soc. **10** (1984), no. 1, 27–85.
- [Mal92] J. L. Malouf, *An integer sequence of rational recursion*, Adv. in Math. **110** (1992), 257–261.
- [MSW13] G. Musiker, R. Schiffler, and L. Williams, *Positivity for cluster algebras from surfaces*, Compos. Math. **149** (2013), no. 2, 217–263.
- [NZ12] T. Nakanishi and A. Zelevinsky, *On tropical dualities in cluster algebras*, Contemp. Math. **565** (2012), 217–226.
- [QZ17] Y. Qiu and Y. Zhou, *Cluster categories for marked surfaces: Punctured case*, Compos. Math. **153** (2017), no. 9, 1779–1819.
- [Som89] M. Somos, *Problem 1470*, Crux Mathematicorum **15** (1989), 208.
- [S⁺09] William A. Stein et al., *Sage mathematics software (version 8.1)*, The Sage Development Team, 2009. <http://www.sagemath.org>.
- [Yur18] T. Yurikusa, *Combinatorial cluster expansion formulas from triangulated surfaces*, 2018. arXiv:1808.01567 [math.CO].

謝辞

まず、博士課程前期の2年間を通して、セミナー発表の指導、研究における助言、投稿論文、修士論文の添削など、様々なシーンにおいて私を支援してくださった中西知樹先生に心より感謝いたします。この2年の研究生生活の中で自分には至らない点が多々ありましたが、辛抱強くご指導いただきました。数学への関心を高く保ち続けることができたのは、先生のご指導があつてのことです。

次に、論文 [FG18] の共著者、藤原祥吾氏に感謝いたします。彼の発想は非常に才能に富んでおり共著論文においては主定理を導くための重要な補題をはじめ様々な命題を導出して頂きました。セミナー仲間としても発表の準備や発表中の姿勢など尊敬できる点が多く、私にとって非常に実り多い少人数クラスとなりました。

もう1つの論文 [GY] の共著者であり、少人数クラスのオブザーバである百合草寿哉氏に感謝いたします。共著論文では定理の大枠を整えてくださり、また執筆についても大部分を担って頂きました。少人数クラスにおいても的確な指摘をしていただくことが多く、内容理解の助けとなりました。

また、私の研究を様々な面でご支援いただいた伊藤由佳理先生、金銅誠之先生、柳田伸太郎先生に御礼申し上げます。

さらに、学部時代から私のセミナーや発表を見て指導して頂いている榎本悠久氏、井上秀樹氏をはじめ、学部から6年の間共に過ごしてきた高原嶺樹氏、数理自習室 (A333 教室) での出会いを通じて数学的な交流を続けている同期や後輩たちに感謝申し上げます。

最後に、博士課程前期の間を通して心身ともにサポートして頂いた、副島佳奈氏に深く感謝申し上げます。